数学Ⅱ・数学B 第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第3問 （選択問題）（配点　20）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて47ページの正規分布表を用いてもよい。また，ここでの**晴れ**の定義については，気象庁の天気概況の「快晴」または「晴」とする。

(1) 太郎さんは，自分が住んでいる地域において，日曜日に**晴れ**となる確率を考えている。

晴れの場合は1，**晴れ**以外の場合は0の値をとる確率変数をXと定義する。また，$X=1$である確率をpとすると，その確率分布は表1のようになる。

表　1

X	0	1	計
確　率	$1-p$	p	1

この確率変数Xの平均(期待値)をmとすると

$m = \boxed{\text{ア}}$ p ⓪ (2点)

$m=E(X) = 0\cdot(1-p)+1\cdot p$
$=\boxed{p}$ ⓪ p ← $X=1$の確率

となる。

太郎さんは，ある期間における連続したn週の日曜日の天気を，表1の確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさnの標本とみなし，それらのXを確率変数X_1，X_2，…，X_nで表すことにした。そして，その標本平均$\overline{X}$を利用して，母平均mを推定しようと考えた。実際に$n=300$として**晴れ**の日数を調べたところ，表2のようになった。

$\overline{X} = \dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

表　2

天　気	日　数
晴れ	75
晴れ以外	225
計	300

表2より

$\overline{X} = \dfrac{75}{300}$

$= \dfrac{1}{4}$

（数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。）

母標準偏差を σ とすると，$n = 300$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\boxed{\;3\;}\right)$ に従う。(2点)

$N\left(m, \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$ に従う　③イ

一般に，母標準偏差 σ がわからないとき，標本の大きさ n が大きければ，σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いてもよいことが知られている。S は

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}(X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots+X_n{}^2)-\boxed{\;1\;}}\ (\overline{X})^2$$

$S=\sqrt{\frac{1}{n}(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)-\boxed{(\overline{X})^2}}$，①ウ

$\sqrt{\ }$ の中は X の分散

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は 0 または 1

で計算できる。ここで，$X_1{}^2 = X_1$，$X_2{}^2 = X_2$，$\cdots$，$X_n{}^2 = X_n$ であることに着目し，右辺を整理すると，$S = \sqrt{\boxed{\;2\;}}$ と表されることがわかる。

$\overline{X}(1-\overline{X})$

(ウ,エ両方正解で3点)

$S=\sqrt{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-(\overline{X})^2}=\sqrt{\overline{X}-(\overline{X})^2}$

$=\boxed{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}$　②エ

よって，表2より，大きさ $n = 300$ の標本から求められる母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は $\boxed{\;0\;}$ となる。(3点)

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とおくと $N(0,1)$ に従い

$P(|Z|\leqq 1.96)=0.95$ より $\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\leqq 1.96$

すなわち $\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ここで $\overline{X}=\frac{1}{4}=0.25$

$\sigma=S=\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$n=300$ なので

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{300}}$

$=\frac{1}{4\cdot 10}$

$=0.025$

$1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\times 0.025$

$=0.049$

求める信頼区間は

$0.25-0.049\leqq m\leqq 0.25+0.049$

よって

$\boxed{0.201\leqq m\leqq 0.299}$　⓪オ

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ p　　① p^2　　② $1-p$　　③ $(1-p)^2$

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ σ　　① σ^2　　② $\frac{\sigma}{n}$　　③ $\frac{\sigma^2}{n}$　　④ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\overline{X}$　　ウ ① $(\overline{X})^2$　　エ ② $\overline{X}(1-\overline{X})$　　③ $1-\overline{X}$

$\boxed{\text{オ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $0.201 \leqq m \leqq 0.299$　　① $0.209 \leqq m \leqq 0.291$

② $0.225 \leqq m \leqq 0.250$　　③ $0.225 \leqq m \leqq 0.275$

④ $0.247 \leqq m \leqq 0.253$　　⑤ $0.250 \leqq m \leqq 0.275$

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

$$\begin{array}{r} 1.96 \\ \times\ 0.025 \\ \hline 980 \\ 392\ \ \\ \hline 0.04900 \end{array}$$

(2) ある期間において，「ちょうど3週続けて日曜日の天気が**晴れ**になること」がどのくらいの頻度で起こり得るのかを考察しよう。以下では，連続する k 週の日曜日の天気について，(1)の太郎さんが考えた確率変数のうち X_1，X_2，…，X_k を用いて調べる。ただし，k は3以上300以下の自然数とする。

X_1，X_2，…，X_k の値を順に並べたときの0と1からなる列において，「ちょうど三つ続けて1が現れる部分」をAとし，Aの個数を確率変数 U_k で表す。例えば，$k = 20$ とし，X_1，X_2，…，X_{20} の値を順に並べたとき

$$1, 1, 1, 1, 0, \underbrace{1, 1, 1}_{\text{A}}, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \underbrace{1, 1, 1}_{\text{A}}$$

であったとする。この例では，下線部分はAを示しており，1が四つ以上続く部分はAとはみなさないので，$U_{20} = 2$ となる。

$k = 4$ のとき，X_1，X_2，X_3，X_4 のとり得る値と，それに対応した U_4 の値を書き出すと，表3のようになる。

表 3

X_1	X_2	X_3	X_4	U_4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0

$U_4 = 1$ となるのは 2通り

U_4	0	1
確率	q_0	q_1

とすると

$E(U_4) = 0 \cdot q_0 + 1 \cdot q_1$
$= q_1$ ← $U_4 = 1$ の確率

$X_k = 1$ となる確率を $p = \frac{1}{4}$ とすると
$X_k = 0$ となる確率は $1 - p = \frac{3}{4}$

$E(U_4) = p^3(1-p) \times 2$
$= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} \times 2$
$= \boxed{\frac{3}{128}}$ カ

ここで，U_k の期待値を求めてみよう。(1)における p の値を $p=\frac{1}{4}$ とする。

$k=4$ のとき，U_4 の期待値は

$$E(U_4)=\frac{\boxed{3}}{128} \quad (3点)$$

となる。$k=5$ のとき，U_5 の期待値は

$$E(U_5)=\frac{\boxed{33}}{1024} \quad (3点)$$

となる。

$U_5 \geqq 2$ となることはない

$U_5=1$ となるのは

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	1	1	0	□
0	1	1	1	0
□	0	1	1	1

(□は0, 1どちらでもよい)

$E(U_5)$ は $U_5=1$ となる確率なので

$$E(U_5)=p^3(1-p)\times 2+p^3(1-p)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}\cdot 2+\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{24+9}{4^5}=\boxed{\frac{33}{1024}}$$ キク

下の補

4以上の k について，k と $E(U_k)$ の関係を詳しく調べると，座標平面上の点 $(4,\ E(U_4))$，$(5,\ E(U_5))$，…，$(300,\ E(U_{300}))$ は一つの直線上にあることがわかる。この事実によって

↖解くにはこの事実を用いる

$$E(U_{300})=\frac{\boxed{21}}{\boxed{8}} \quad (4点)$$

となる。

2点 $(4, E(U_4))$, $(5, E(U_5))$ を通る直線の方程式は

$E(U_4)=\frac{3}{128}=\frac{24}{1024}$, $E(U_5)=\frac{33}{1024}$

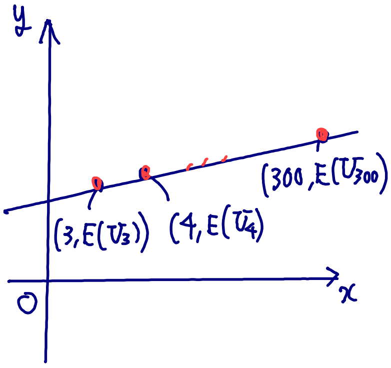
傾きが $\dfrac{\frac{33}{1024}-\frac{24}{1024}}{5-4}=\frac{9}{1024}$

より

$$y=\frac{9}{1024}(x-4)+\frac{3}{128}$$

この直線上に点 $(300, E(U_{300}))$ があるので

$$E(U_{300})=\frac{9}{1024}(300-4)+\frac{3}{128}$$
$$=\frac{9}{\cancel{1024}_{128}}\cdot\cancel{296}^{37}+\frac{3}{128}$$
$$=\frac{9\cdot 37+3}{128}$$
$$=\frac{336}{128}=\frac{16\cdot 21}{16\cdot 8}$$
$$=\boxed{\frac{21}{8}}$$ ケコ サ



補 $X_\ell\ X_{\ell+1}\ X_{\ell+2}$ $(\ell=1,2,3,\cdots,k-2)$ が A の部分になるとき $Y_\ell=1$
A の部分にならないとき $Y_\ell=0$
とすると $U_k=Y_1+Y_2+\cdots+Y_{k-2}$

$$E(U_k)=E(Y_1+Y_2+\cdots+Y_{k-2})=E(Y_1)+E(Y_2)+\cdots+E(Y_{k-2})$$

$E(Y_\ell)$ は $Y_\ell=1$ の確率に等しい

$\boxed{\ell=1}$ $X_1\ X_2\ X_3\ X_4$: $\underbrace{1\ 1\ 1}_{A}\ 0$ 確率は $p^3(1-p)$

$\boxed{\ell=2,\cdots,k-3}$ $X_{\ell-1}\ X_\ell\ X_{\ell+1}\ X_{\ell+2}\ X_{\ell+3}$: $0\ \underbrace{1\ 1\ 1}_{A}\ 0$

確率は $(1-p)p^3(1-p)=p^3(1-p)^2$

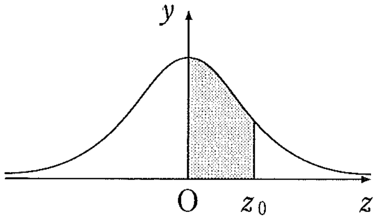
$\boxed{\ell=k-2}$ $X_{k-3}\ X_{k-2}\ X_{k-1}\ X_k$: $0\ \underbrace{1\ 1\ 1}_{A}$ 確率は $p^3(1-p)$

$$E(U_k)=p^3(1-p)\times 2+p^3(1-p)^2\times(k-4)$$
$$=\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}\cdot 2+\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot(k-4)$$
$$=\frac{24+9(k-4)}{4^5}$$
$$=\frac{9k-12}{1024}$$

よって $(k, E(U_k))$ $(k\geqq 4)$ は直線 $y=\dfrac{9x-12}{1024}$ 上にある

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990