第２問 （必答問題）（配点　30）

m を $m>1$ を満たす定数とし，$f(x)=3(x-1)(x-m)$ とする。また，$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とする。関数 $y=f(x)$ と $y=S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

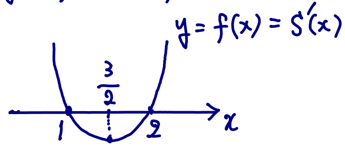
両辺を x で微分して　$S'(x)=f(x)$

(1)　$m=2$ のとき，すなわち，$f(x)=3(x-1)(x-2)$ のときを考える。

(i)　$f'(x)=0$ となる x の値は $x=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$ である。
(2点)

$f(x)=3(x^2-3x+2)$
$f'(x)=3(2x-3)$
$f'(x)=0$ とすると $x=\boxed{\dfrac{3}{2}}$　ア イ

補　$f'(x)=0$ となる x は
$y=f(x)$ のグラフの頂点の x 座標



(ii)　$S(x)$ を計算すると

$$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\int_0^x\left(3t^2-\boxed{9}\,t+\boxed{6}\right)dt$$
(1点)
$$=x^3-\frac{\boxed{9}}{\boxed{2}}x^2+\boxed{6}\,x$$
(2点)

$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$
$=\boxed{\int_0^x(3t^2-9t+6)\,dt}$
ウ　エ
$=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^x$
$=\boxed{x^3-\frac{9}{2}x^2+6x}$　オ カ キ

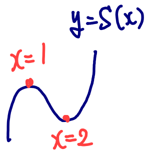
であるから

$x=\boxed{1}$ のとき，$S(x)$ は極大値 $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$ をとり
(1点)　(1点)

$x=\boxed{2}$ のとき，$S(x)$ は極小値 $\boxed{2}$ をとることがわかる。
(1点)　(1点)

$S'(x)=3x^2-9x+6$
$=3(x-1)(x-2)$
$=f(x)$

$S(1)=1-\frac{9}{2}+6=\frac{5}{2}$
$S(2)=8-18+12=2$



x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$	+	0	−	0	+
$S(x)$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	2	↗

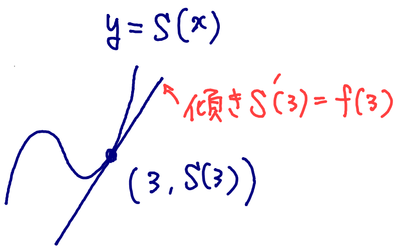
$x=\boxed{1}$ のとき $S(x)$ は極大値 $\boxed{\frac{5}{2}}$　ケ コ
ク
$x=\boxed{2}$ のとき $S(x)$ は極小値 $\boxed{2}$　シ
サ

(iii) $f(3)$と一致するものとして，次の⓪～④のうち，正しいものは $\boxed{\;3\;}$ である。 (3点)

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $S(3)$
① 2点$(2,\ S(2))$，$(4,\ S(4))$を通る直線の傾き
② 2点$(0,\ 0)$，$(3,\ S(3))$を通る直線の傾き
③ 関数 $y = S(x)$のグラフ上の点$(3,\ S(3))$における接線の傾き
④ 関数 $y = f(x)$のグラフ上の点$(3,\ f(3))$における接線の傾き

$S'(x) = f(x)$
より
$S'(3) = f(3)$



$f(3)$ は $S(x)$ の $x=3$ における微分係数なので
$y = S(x)$ のグラフ上の点$(3,\ S(3))$における接線の傾き
と一致する

$\boxed{3}$ // ス

数学Ⅱ・数学B

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1，$1 \leqq x \leqq m$ の範囲で，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_1 = \boxed{0}$，$S_2 = \boxed{5}$ である。
(セ，ソ両方正解で2点)

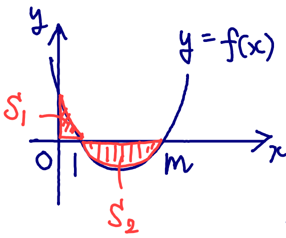
$S_1 = S_2$ となるのは $\boxed{1}$ $= 0$ のときであるから，$S_1 = S_2$ が成り立つようなf(x)に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{1}$ である。また，
(2点)
(4点)
$S_1 > S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{2}$ である。
(2点)

$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ セ	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$	② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$
③ $\displaystyle\int_0^1 \{-f(x)\}\,dx$	④ $\displaystyle\int_0^m \{-f(x)\}\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$ ソ

$\boxed{タ}$ の解答群

⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$
② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$	③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^m f(x)\,dx$
④ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^m f(x)\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^m f(x)\,dx$
⑥ $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx + \int_1^m f(x)\,dx$	



$S_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$　$\boxed{0}$ // セ

$S_2 = \displaystyle\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$　$\boxed{5}$ // ソ

$S_1 = S_2$ となるのは $S_1 - S_2 = 0$

より

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^m f(x)\,dx = 0$

よって　$\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx = 0$　$\boxed{1}$ // タ

$y = S(x)$

について

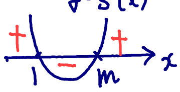
$y' = S'(x) = f(x)$

$= 3(x-1)(x-m)$

$y' = 0$ とすると $x = 1, m$

$(1 < m)$

$y = S'(x)$



x	$\cdots$	1	$\cdots$	m	$\cdots$
$S'(x)$	+	0	−	0	+
$S(x)$	↗		↘	$S_1 - S_2$	↗

極小値で
グラフの概形
がみえる

$S(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,dt = 0$

$S(m) = \displaystyle\int_0^m f(x)\,dx = S_1 - S_2$

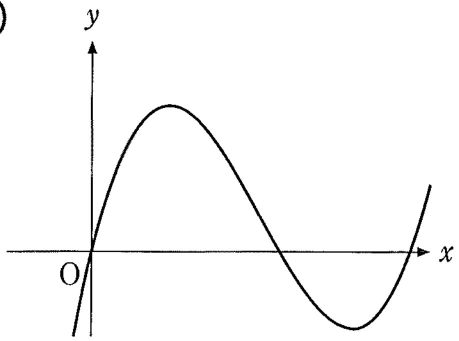
$S_1 = S_2$ のとき $y = S(x)$ のグラフの概形は

$S(m) = 0$　なので $\boxed{1}$ // チ

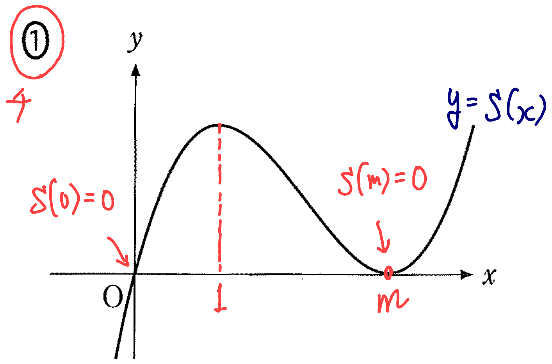
$S_1 > S_2$ のとき $S(m) > 0$　なので $\boxed{2}$ // ツ

$\boxed{チ}$，$\boxed{ツ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

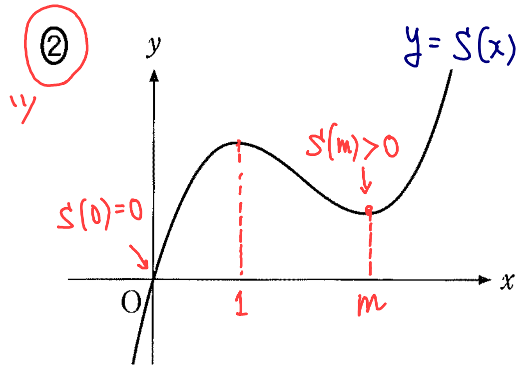
⓪



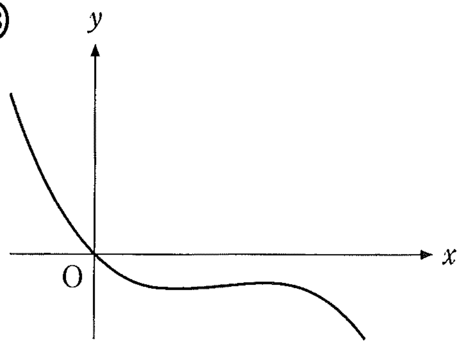
①



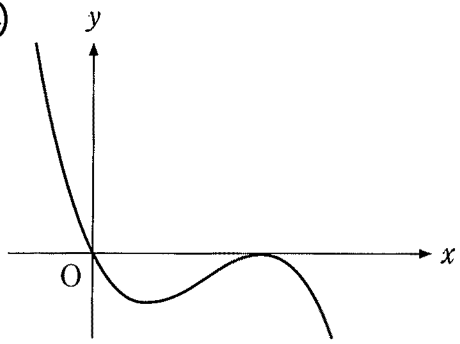
②



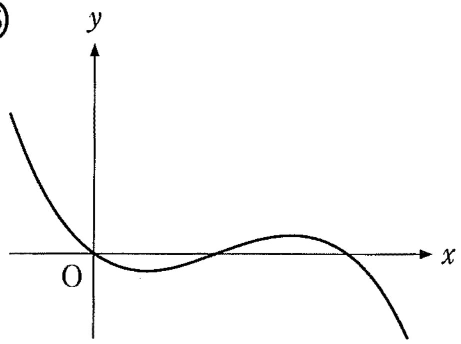
③



④



⑤



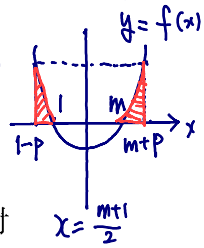
（数学Ⅱ・数学B第２問は次ページに続く。）

(3) 関数 $y=f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y=S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう。

$y=f(x)$ のグラフは $y=0$ のとき $x=1, m$ より
直線 $\boxed{x=\frac{m+1}{2}}$ に関して対称 $\boxed{3}$ テ

関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\boxed{\ 3\ }$ $\left(\frac{m+1}{2}\right)$ (1点) に関して対称であるから，すべての正の実数 p に対して

右図の斜線部の面積より
$\int_{1-p}^{1} f(x)\,dx=\int_{m}^{\boxed{m+p}} f(x)\,dx$ …①　$\boxed{4}$ ト



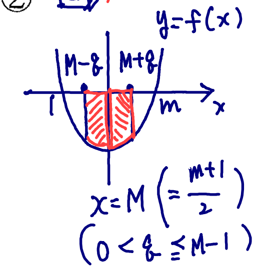
$$\int_{1-p}^{1} f(x)\,dx=\int_{m}^{\boxed{4}} f(x)\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
(④ $m+p$)

が成り立ち，$M=\boxed{\quad}$ $\left(\frac{m+1}{2}\right)$ とおくと $0<q\leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して

右下図の斜線部の面積より
$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}dx=\int_{M}^{\boxed{M+q}}\{-f(x)\}dx$ …②　$\boxed{2}$ ナ

$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}\,dx=\int_{M}^{\boxed{2}}\{-f(x)\}\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$
(② $M+q$)

(ト，ナ両方正解で3点)



が成り立つことがわかる。すべての実数 α，β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=S(\beta)-S(\alpha) \quad \cdots ⊛$$

が成り立つことに注意すれば，① と ② はそれぞれ

$$S(1-p)+S\left(\boxed{m+p}\right)=\boxed{0}$$
(⓪ $S(1)+S(m)$)

$$2S(M)=\boxed{4}$$
(④ $S(M+q)+S(M-q)$)

(ニ，ヌ両方正解で2点)

となる。

⊛を用いて①は
$S(1)-S(1-p)=S(m+p)-S(m)$
$\therefore\ S(1-p)+S(m+p)=\boxed{S(1)+S(m)}$ …③　$\boxed{0}$ ニ

⊛を用いて②は
$-\{S(M)-S(M-q)\}=-\{S(M+q)-S(M)\}$
$\therefore\ 2S(M)=\boxed{S(M+q)+S(M-q)}$ …④　$\boxed{4}$ ヌ

以上から，すべての正の実数 p に対して，2点 $(1-p,\ S(1-p))$，$\left(\boxed{m+p},\ S\left(\boxed{m+p}\right)\right)$ を結ぶ線分の中点についての記述として，後の⓪〜⑤のうち，最も適当なものは $\boxed{2}$ である。

中点は p によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ 上にある

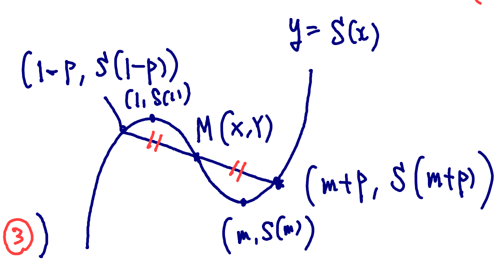
(2点)

中点Mは3次曲線 $y=S(x)$ の対称点（変曲点）

2点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(m+p,\ S(m+p))$ を結ぶ線分の中点を $M(X, Y)$ とすると

$$X=\frac{(1-p)+m+p}{2}=\frac{1+m}{2}$$

$$Y=\frac{S(1-p)+S(m+p)}{2}=\frac{S(1)+S(m)}{2} \quad (\because ③)$$



④で $\begin{cases} M+q=m \\ M-q=1 \end{cases}$ とすると $M=\frac{m+1}{2}$ なので $2S\left(\frac{m+1}{2}\right)=S(m)+S(1)$ $\therefore\ \frac{S(1)+S(m)}{2}=S\left(\frac{m+1}{2}\right)$

すなわち $Y=S(X)$ をみたす。よって，中点Mは p によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ 上にある。$\boxed{2}$ ネ

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ m	① $\frac{m}{2}$	② $m+1$	③ $\frac{m+1}{2}$

$\boxed{ト}$ の解答群

⓪ $1-p$	① p	② $1+p$
③ $m-p$	④ $m+p$	

$\boxed{ナ}$ の解答群

⓪ $M-q$	① M	② $M+q$
③ $M+m-q$	④ $M+m$	⑤ $M+m+q$

$\boxed{ニ}$ の解答群

⓪ $S(1)+S(m)$	① $S(1)+S(p)$	② $S(1)-S(m)$
③ $S(1)-S(p)$	④ $S(p)-S(m)$	⑤ $S(m)-S(p)$

$\boxed{ヌ}$ の解答群

⓪ $S(M-q)+S(M+m-q)$	① $S(M-q)+S(M+m)$
② $S(M-q)+S(M)$	③ $2S(M-q)$
④ $S(M+q)+S(M-q)$	⑤ $S(M+m+q)+S(M-q)$

$\boxed{ネ}$ の解答群

⓪ x 座標は p の値によらず一つに定まり，y 座標は p の値により変わる。
① x 座標は p の値により変わり，y 座標は p の値によらず一つに定まる。
② 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。
③ 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。
④ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。
⑤ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。