〔2〕 $S(x)$ を $x$ の2次式とする。$x$ の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$，余りを $U(x)$ とする。ただし，$S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする。

(15点)

$P(x) = S(x)T(x) + U(x)$

$$S(x)\overline{)P(x)} \;\to\; T(x),\ \ldots,\ U(x)$$

(1) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5$，$S(x) = x^2 + 4x + 7$ の場合を考える。

方程式 $S(x) = 0$ の解は $x = \boxed{-2} \pm \sqrt{\boxed{3}}\,i$ である。(2点)

また，$T(x) = \boxed{2}x - \boxed{1}$，$U(x) = \boxed{12}$ である。(2点) (1点)

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

$S(x)=0$ とすると $x^2+4x+7=0$

$\therefore\ x = \boxed{-2\pm\sqrt{3}\,i}$ アイ,ウ

$$
\begin{array}{r}
2x - 1 \\
x^2+4x+7 \,\big)\, \overline{2x^3+7x^2+10x+5} \\
\underline{2x^3+8x^2+14x} \\
-x^2-4x+5 \\
\underline{-x^2-4x-7} \\
12
\end{array}
$$

よって $T(x) = \boxed{2x-1}$ エ,オ

$U(x) = \boxed{12}$ カキ

S(α) = S(β) = 0

(2)　方程式 $S(x)=0$ は異なる二つの解 $\alpha$，$\beta$ をもつとする。このとき

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる

ことと同値な条件を考える。

P(x) = S(x)T(x) + k
が x の恒等式で x = α, β として
P(α) = S(α)T(α) + k = k
P(β) = S(β)T(β) + k = k
0　すなわち
P(α) = P(β) = k

(i)　余りが定数になるときを考えてみよう。

仮定から，定数 $k$ を用いて $U(x)=k$ とおける。このとき，$\boxed{\text{③}}$。(3点)

したがって，余りが定数になるとき，$\boxed{\text{①}}$ が成り立つ。(1点)

③ チ　① ツ

$\boxed{\text{チ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる。また，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

①　$P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

②　$S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる。また，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

③　$P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪　$T(\alpha)=T(\beta)$ | ①　$P(\alpha)=P(\beta)$ |
| ②　$T(\alpha)\neq T(\beta)$ | ③　$P(\alpha)\neq P(\beta)$ |

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

P(α) = P(β)

(ii) 逆に $\boxed{\phantom{ト}}$ が成り立つとき，余りが定数になるかを調べよう。

$S(x)$ が 2 次式であるから，$m$，$n$ を定数として $U(x) = mx + n$ とおける。$P(x)$ を $S(x)$，$T(x)$，$m$，$n$ を用いて表すと，$P(x) =$ $\boxed{①}$ となる。この等式の $x$ に $\alpha$，$\beta$ をそれぞれ代入すると $\boxed{①}$ となるので，

(テ,ト両方正解で2点)

P(α) = P(β)

$\boxed{\phantom{ト}}$ と $\alpha \neq \beta$ より $\boxed{③}$ となる。以上から余りが定数になることがわかる。

(テ,トが両方正解かつナが正解で1点)

$U(x)=mx+n$ とおくと $P(x)=S(x)T(x)+mx+n$ ① テ となる.

テ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ $(mx+n)S(x)T(x)$ | ① $S(x)T(x)+mx+n$ |
| ② $(mx+n)S(x)+T(x)$ | ③ $(mx+n)T(x)+S(x)$ |

$x=\alpha$, $x=\beta$ を代入すると

$P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+m\alpha+n = m\alpha+n$

$P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+m\beta+n = m\beta+n$ ① ト

$(\because S(\alpha)=S(\beta)=0)$

ト の解答群

⓪ $P(\alpha) = T(\alpha)$ かつ $P(\beta) = T(\beta)$

① $P(\alpha) = m\alpha + n$ かつ $P(\beta) = m\beta + n$

② $P(\alpha) = (m\alpha + n)T(\alpha)$ かつ $P(\beta) = (m\beta + n)T(\beta)$

③ $P(\alpha) = P(\beta) = 0$

④ $P(\alpha) \neq 0$ かつ $P(\beta) \neq 0$

$P(\alpha)=P(\beta)$ が成り立つので $m\alpha+n=m\beta+n$ すなわち $m(\alpha-\beta)=0$

$\alpha\neq\beta$ より $\alpha-\beta\neq0$ であるから $m=0$ ③ ナ

ナ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ $m \neq 0$ | ① $m \neq 0$ かつ $n = 0$ |
| ② $m \neq 0$ かつ $n \neq 0$ | ③ $m = 0$ |
| ④ $m = n = 0$ | ⑤ $m = 0$ かつ $n \neq 0$ |
| ⑥ $n = 0$ | ⑦ $n \neq 0$ |

補 $n$ は任意の定数

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(i), (ii) の考察から，方程式 $S(x)=0$ が異なる二つの解 $\alpha$，$\beta$ をもつとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $\boxed{\phantom{ア}}$ であることは同値である。

$P(\alpha)=P(\beta)$

$\alpha=-1,\ \beta=2$ としているだけ

(3) $p$ を定数とし，$P(x)=x^{10}-2x^{9}-px^{2}-5x$，$S(x)=x^{2}-x-2$ の場合を考える。$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき，$p=\boxed{-6}$ となり，その余りは $\boxed{14}$ となる。

(2点)

(1点)

$S(x)=0$ とすると $x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,2$

$P(-1)=1+2-p+5=-p+8$

$P(2)=2^{10}-2^{10}-4p-10=-4p-10$

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる条件は (2) より

$P(-1)=P(2)$

であるから $-p+8=-4p-10$

よって $p=\boxed{-6}$ $=ア$

その余りは

$P(-1)=-(-6)+8=\boxed{14}$ ネ

$\alpha=-1,\ \beta=2$ として

$P(\alpha)=P(\beta)$

この値が余り

(補) $P(2)=-4(-6)-10=14$