第５問 （選択問題）（配点　20）

図１のように，平面上に５点 A，B，C，D，E があり，線分 AC，CE，EB，BD，DA によって，星形の図形ができるときを考える。線分 AC と BE の交点を P，AC と BD の交点を Q，BD と CE の交点を R，AD と CE の交点を S，AD と BE の交点を T とする。

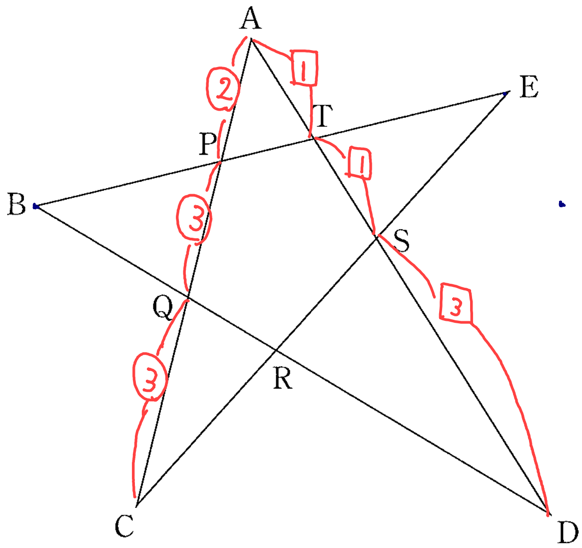


図　1

ここでは

$$AP : PQ : QC = 2 : 3 : 3, \quad AT : TS : SD = 1 : 1 : 3$$

を満たす星形の図形を考える。

以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ。

（数学Ⅰ・数学A第５問は次ページに続く。）

(1)　△AQD と直線 CE に着目すると

$$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{\boxed{\text{ア}}}{CQ}=1$$

AC　0

(2点)

が成り立つので

QR：RD＝ 1 ： 4

(3点)

となる。また，△AQD と直線 BE に着目すると

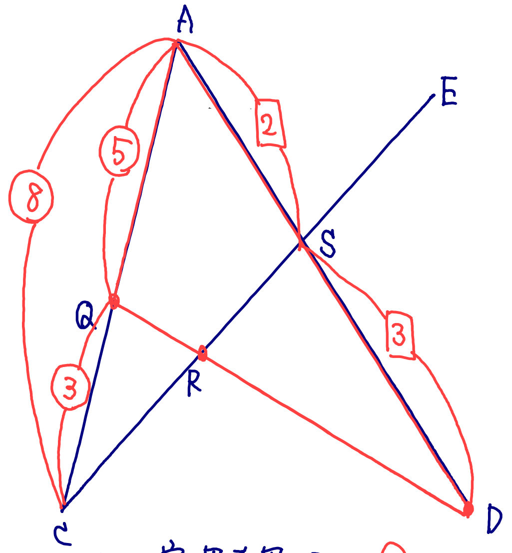
QB：BD＝ 3 ： 8

(2点)

となる。したがって

BQ：QR：RD＝ 3 ： 1 ： 4

となることがわかる。



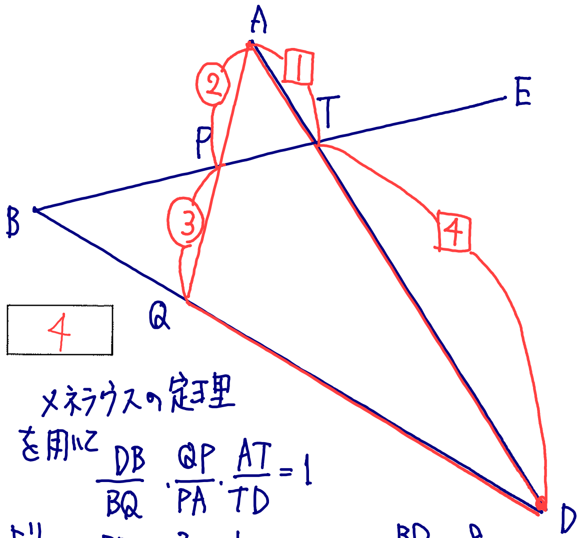
メネラウスの定理を用いて　0 ア

$$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{\boxed{AC}}{CQ}=1$$

が成り立つので $\frac{QR}{RD}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}=1$

∴ $\frac{QR}{RD}=\frac{1}{4}$ であるから　QR : RD = $\boxed{1:4}$

イウ



メネラウスの定理を用いて $\frac{DB}{BQ}\cdot\frac{QP}{PA}\cdot\frac{AT}{TD}=1$

より $\frac{BD}{QB}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=1$　∴ $\frac{BD}{QB}=\frac{8}{3}$

であるから

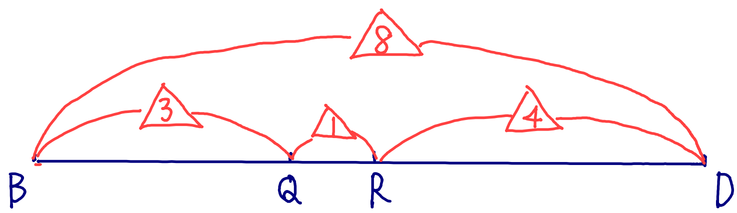
QB : BD = $\boxed{3:8}$

エオ

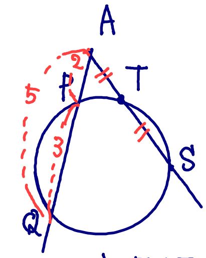
$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ AC	① AP	② AQ	③ CP	④ PQ

(数学Ⅰ・数学A第5問は次ページに続く。)



BQ : QR : RD = 3 : 1 : 4

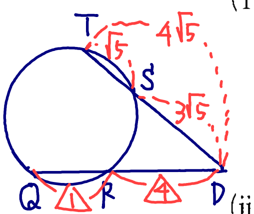


(2) 5点P, Q, R, S, Tが同一円周上にあるとし, AC = 8であるとする。

$AC=8$ より $AP=2, PQ=3, QC=3$

方べきの定理を用いて
$AP\cdot AQ=AT\cdot AS$
$2\cdot 5=AT\cdot 2AT$
$AT^2=5$
よって $AT=\boxed{\sqrt{5}}$ カ

やらなくてよいけど…



(i) 5点A, P, Q, S, Tに着目すると, AT : AS = 1 : 2より

AT = $\sqrt{\boxed{\quad 5 \quad}}$ となる。さらに, 5点D, Q, R, S, Tに着目すると (3点)

DR = $4\sqrt{3}$ となることがわかる。

(1)より $BQ=3\sqrt{3}$, $QR=\sqrt{3}$ もわかる

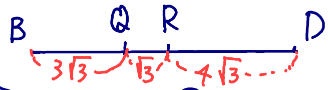
$TS=\sqrt{5}$
$DS=3\sqrt{5}$

方べきの定理を用いて
$DR\cdot DQ=DS\cdot DT$
$DR\cdot \frac{5}{4}DR=3\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}$
$DR^2=48$
$\therefore DR=4\sqrt{3}$

(ii) 3点A, B, Cを通る円と点Dとの位置関係を, 次の**構想**に基づいて調べよう。

> **構想**
>
> 線分ACとBDの交点Qに着目し, AQ・CQとBQ・DQの大小を比べる。

$BQ\cdot DQ=3\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}=\boxed{45}$ キク



まず, AQ・CQ = 5・3 = 15 かつ BQ・DQ = $\boxed{\ 45\ }$ であるから

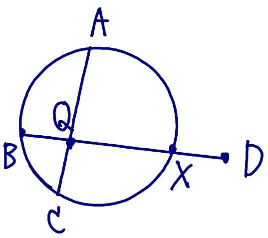
15 < 45 なので AQ・CQ $\boxed{<}$ BQ・DQ …① 0ケ

AQ・CQ $\boxed{\ 0\ }$ BQ・DQ　……………………………… ①

<

(キク, ケ両方正解で3点)

が成り立つ。また, 3点A, B, Cを通る円と直線BDとの交点のうち, Bと異なる点をXとすると



方べきの定理を用いて
$AQ\cdot CQ=BQ\cdot XQ$ …②

AQ・CQ $\boxed{\ 1\ }$ BQ・XQ　……………………………… ②

=

①, ②より $BQ\cdot XQ<BQ\cdot DQ$
$\therefore XQ<DQ$
よって点Dは3点A, B, Cを通る円の $\boxed{外部}$ にある ②シ

が成り立つ。①と②の左辺は同じなので, ①と②の右辺を比べることにより, XQ $\boxed{\ 0\ }$ DQが得られる。したがって, 点Dは3点A, B, Cを通る円の $\boxed{\ 2\ }$ にある。

外部　(コ, サ, シすべて正解で4点)

$\boxed{\ ケ\ }$ ～ $\boxed{\ サ\ }$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

ケ ⓪ <	コ ① =	② >

$\boxed{\ シ\ }$ の解答群

⓪ 内　部	① 周　上	② 外　部

(数学Ⅰ・数学A第5問は次ページに続く。)

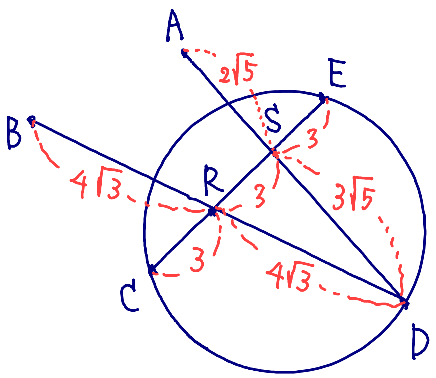
(iii)　3点C，D，Eを通る円と2点A，Bとの位置関係について調べよう。

この星形の図形において，さらに CR = RS = SE = 3 となることがわかる。したがって，点Aは3点C，D，Eを通る円の $\boxed{2}$ にあり，点Bは3点C，D，Eを通る円の $\boxed{2}$ にある。

（ス,セ両方正解で3点）

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 内　部	① 周　上	ス,セ ② 外　部



$SC \cdot SE = 6 \cdot 3 = 18$

$SD \cdot SA = 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 30$

$\therefore\ SC \cdot SE < SD \cdot SA$

点Aは3点C,D,Eを通る円の $\boxed{\text{外部}}$ // ②ス

$RC \cdot RE = 3 \cdot 6 = 18$

$RD \cdot RB = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 48$

$\therefore\ RC \cdot RE < RD \cdot RB$

点Bは3点C,D,Eを通る円の $\boxed{\text{外部}}$ // ②セ