

第 4 問 (選択問題) (配点 20)

T3, T4, T6 を次のようなタイマーとする。

T3 : 3 進数を 3 桁表示するタイマー

T4 : 4 進数を 3 桁表示するタイマー

T6 : 6 進数を 3 桁表示するタイマー



$$T3 = abc_{(3)} = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$$

$$T4 = abc_{(4)} = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$$

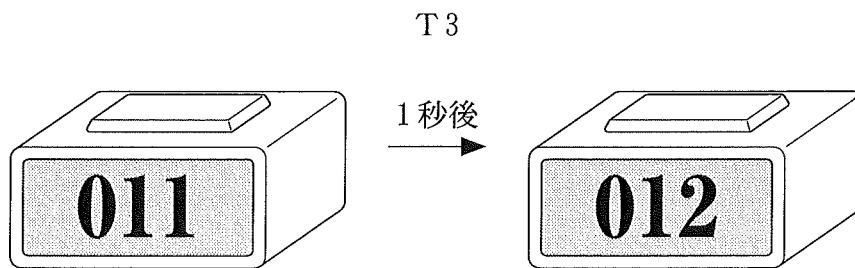
$$T6 = abc_{(6)} = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c$$

なお、 $n$  進数とは  $n$  進法で表された数のことである。

これらのタイマーは、すべて次の表示方法に従うものとする。

表示方法

- (a) スタートした時点でタイマーは 000 と表示されている。
- (b) タイマーは、スタートした後、表示される数が 1 秒ごとに 1 ずつ増えていき、3 桁で表示できる最大の数が表示された 1 秒後に、表示が 000 に戻る。
- (c) タイマーは表示が 000 に戻った後も、(b) と同様に、表示される数が 1 秒ごとに 1 ずつ増えていき、3 桁で表示できる最大の数が表示された 1 秒後に、表示が 000 に戻るという動作を繰り返す。



参考図

例えば、T3 はスタートしてから 3 進数で  $12_{(3)}$  秒後に 012 と表示される。その後、222 と表示された 1 秒後に表示が 000 に戻り、その  $12_{(3)}$  秒後に再び 012 と表示される。

(数学 I ・ 数学 A 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I ・ 数学 A

(1) T6 は、スタートしてから 10 進数で 40 秒後に  $\boxed{104}$  と表示される。

T4 は、スタートしてから 2 進数で  $10011_{(2)}$  秒後に  $\boxed{103}$  と表示される。

(2) T4 をスタートさせた後、初めて表示が 000 に戻るのは、スタートしてから 10 進数で  $\boxed{64}$  秒後であり、その後も  $\boxed{64}$  秒ごとに表示が 000 に戻る。

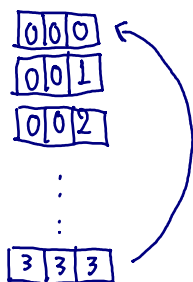
同様の考察を T6 に対しても行うことにより、T4 と T6 を同時にスタートさせた後、初めて両方の表示が同時に 000 に戻るのは、スタートしてから 10 進数で  $\boxed{1728}$  秒後であることがわかる。

(数学 I ・ 数学 A 第 4 問は次ページに続く。)

$$\begin{aligned} (1) \text{ 40 秒後に T6 は } 40 &= 6^2 + 4 \\ &= 1 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6 + 4 \\ &= \boxed{104}_{(6)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10011_{(2)} \text{ 秒後に T4 は } 10011_{(2)} &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \\ &= 2^4 + 2 + 1 \\ &= 4^2 + 3 \\ &= 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 3 \\ &= \boxed{103}_{(4)} \end{aligned}$$

(2) T4 は



$$1000_{(4)} = 4^3 = 64$$

$\boxed{64}$  秒後に同じ表示になる

同様に T6 は  $1000_{(6)} = 6^3 = 216$  秒後に同じ表示になる

T4 と T6 を同時にスタートして初めて表示が同時に 000 となるのは 64 と 216 の最小公倍数

$$64 = 2^6$$

$$216 = 2^3 \cdot 3^3$$

よ)  $2^6 \cdot 3^3 = 64 \times 27$

$$= \boxed{1728} \text{ 秒後}$$

補)  $1728 = 12^3$

数学 I ・ 数学 A

(3) 0以上の整数  $l$  に対して, T4 をスタートさせた  $l$  秒後に T4 が 012 と表示されることと

$l$  を  $\boxed{64}$  で割った余りが  $\boxed{6}$  であること

(3点)

は同値である。ただし,  $\boxed{\text{スセ}}$  と  $\boxed{\text{ソ}}$  は 10 進法で表されているものとする。

T3 についても同様の考察を行うことにより, 次のことがわかる。

T3 と T4 を同時にスタートさせてから, 初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を  $m$  秒とすると,  $m$  は 10 進法で  $\boxed{518}$  と表される。

(4点)

$$012_{(4)} = 4 + 2 = 6$$

T4 は  $4^3 = 64$  秒ごとと同じ表示になるのだ

T4 をスタートさせて  $l$  秒後に 012 が表示されるのは

$l$  を  $\boxed{64}$  で割った余りが  $\boxed{6}$  である  
スセ ソ

$$012_{(3)} = 3 + 2 = 5$$

T3 は  $3^3 = 27$  秒ごとと同じ表示になるのだ

T3 をスタートさせて  $l$  秒後に 012 が表示されるのは

$l$  を 27 で割った余りが 5 である

T3 と T4 を同時にスタートさせて, 初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を  $m$  秒とすると,  $x, y$  を正の整数とて

$$m = 27x + 5 = 64y + 6$$

と表せて

$$27x - 64y = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$27x - (2 \cdot 27 + 10)y = 1$$

$$27(x - 2y) - 10y = 1$$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ y = 8 \end{cases} \therefore x = 19, y = 8$$

$$27 \cdot 19 - 64 \cdot 8 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\left( \begin{array}{l} \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ と } \times 2 \\ 27(x-19) - 64(y-8) = 0 \\ 27(x-19) = 64(y-8) \\ 27, 64 \text{ は互いに素な } x \text{ を整数と } \times 2 \\ \left\{ \begin{array}{l} x-19 = 64k \\ y-8 = 27k \end{array} \right. \text{ すなわち } \left\{ \begin{array}{l} x = 64k + 19 \\ y = 27k + 8 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

よって  $m$  は  $x=19, y=8$  のとき

$$m = 27 \cdot 19 + 5 = 64 \cdot 8 + 6$$

$$= \boxed{518}$$

7417

また、T4 と T6 の表示に関する記述として、次の①～③のうち、正しいものは  ③  である。

(3点)

テ の解答群

T4 と T6 についてみる

- ① T4 と T6 を同時にスタートさせてから、 $m$  秒後より前に初めて両方が同時に 012 と表示される。
- ② T4 と T6 を同時にスタートさせてから、ちょうど  $m$  秒後に初めて両方が同時に 012 と表示される。
- ③ T4 と T6 を同時にスタートさせてから、 $m$  秒後より後に初めて両方が同時に 012 と表示されることはない。

$$012(16) = 6 + 2 = 8$$

T6 は  $6^3 = 216$  秒ごとと同じ表示になるのだ

T6 をスタートさせて  $n$  秒後に 012 が表示されるのは

$n$  を 216 で割った余りが 8 である

T4 と T6 を同時にスタートさせて、初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を  $n$  秒とするとき、 $x, y$  を正の整数とに

$$n = 64x + 6 = 216y + 8$$

$$64x - 216y = 2$$

両辺を 2 で割って

$$32x - 108y = 1$$

$$2(16x - 54y) = 1$$

$16x - 54y$  は整数であるから (偶数) = 1 となりこれをみたす整数  $x, y$  はない

よって  ③  テ