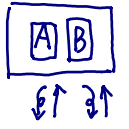


第 3 問 (選択問題) (配点 20)

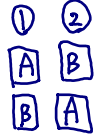
箱の中にカードが 2 枚以上入っており、それぞれのカードにはアルファベットが 1 文字だけ書かれている。この箱の中からカードを 1 枚取り出し、書かれているアルファベットを確認してからもとに戻すという試行を繰り返し行う。



(1) 箱の中に A、B のカードが 1 枚ずつ全部で 2 枚入っている場合を考える。

以下では、2 以上の自然数 n に対し、 n 回の試行で A, B がそろっているとは、 n 回の試行で A、B のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出されることを意味する。

(i) 2 回の試行で A, B がそろっている確率は $\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ である。



(i) 2 回の試行で A, B がそろっている

(ii) 3 回の試行で A, B がそろっている確率を求める。

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \times 2 = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$

例えば、3 回の試行のうち A を 1 回、B を 2 回取り出す取り出し方は 3 通りあり、それらをすべて挙げると次のようになる。

1 回目	2 回目	3 回目
A	B	B
B	A	B
B	B	A

3(通り)

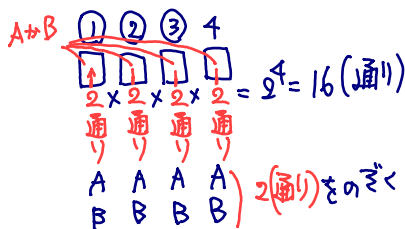
A と B の入れかえ
 $3 \times 2 = \boxed{6}$ (通り)



このように考えることにより、3 回の試行で A, B がそろっている取り出し方は $\boxed{6}$ 通りあることがわかる。よって、3 回の試行で A, B がそろっている確率は $\frac{\boxed{6}}{2^3}$ である。

(iii) 4 回の試行で A, B がそろっている取り出し方は $\boxed{14}$ 通りある。よつ

て、4 回の試行で A, B がそろっている確率は $\frac{\boxed{7}}{\boxed{8}}$ である。



4 回の試行で A, B がそろっているのは
 $2^4 - 2 = \boxed{14}$ (通り)
その確率は $\frac{14}{2^4} = \frac{14}{16} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{8}}$

数学 I ・ 数学 A

(2) 箱の中に \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} のカードが 1 枚ずつ全部で 3 枚入っている場合を考える。

以下では, 3 以上の自然数 n に対し, n 回目の試行で初めて A, B, C がそろうとは, n 回の試行で \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され, かつ \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} のうちいずれか 1 枚が n 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。

(i) 3 回目の試行で初めて A, B, C がそろうのは \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} を 1 枚ずつ取り出すことから $3! = \boxed{6}$ (通り) である。
 (別) (i) 3 回目の試行で初めて A, B, C がそろうのは 2 回目までに 2 種類をとり出し, 3 回目に残りの 1 種類が取り出されることから $2 \times 3 = \boxed{6}$ (通り)

(i) 3 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は $\boxed{6}$ 通りある。
 よって, 3 回目の試行で初めて A, B, C がそろう確率は $\frac{\boxed{6}}{3^3}$ である。

(ii) 4 回目の試行で初めて A, B, C がそろう確率を求める。

4 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は, (1) の (ii) を振り返ることにより, $3 \times \boxed{6}$ 通りあることがわかる。よって, 4 回目の試行で

初めて A, B, C がそろう確率は $\frac{\boxed{2}}{\boxed{9}}$ である。
 (1) (ii) $\left. \begin{array}{l} \text{① ② ③} \\ \boxed{A, B \text{ がそろう}} \\ \boxed{B, C \text{ がそろう}} \\ \boxed{C, A \text{ がそろう}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{④} \\ \boxed{C} \\ \boxed{A} \\ \boxed{B} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{① ② ③} \\ \boxed{A, B \text{ がそろう}} \\ \boxed{B, C \text{ がそろう}} \\ \boxed{C, A \text{ がそろう}} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 6 \times 3 = 18 \text{ (通り)} \\ \text{確率は} \\ \frac{18}{3^4} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{9}} \end{array}$

(iii) 5 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は $\boxed{42}$ 通りある。

よって, 5 回目の試行で初めて A, B, C がそろう確率は $\frac{\boxed{42}}{3^5}$ である。

(i) (iii) $\left. \begin{array}{l} \text{① ② ③ ④} \\ \boxed{A, B \text{ がそろう}} \\ \boxed{B, C \text{ がそろう}} \\ \boxed{C, A \text{ がそろう}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{⑤} \\ \boxed{C} \\ \boxed{A} \\ \boxed{B} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{① ② ③ ④} \\ \boxed{A, B \text{ がそろう}} \\ \boxed{B, C \text{ がそろう}} \\ \boxed{C, A \text{ がそろう}} \end{array}} \right\} 14 \times 3 = \boxed{42} \text{ 通り}$

数学 I ・ 数学 A

- (3) 箱の中に \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} , \boxed{D} のカードが 1 枚ずつ全部で 4 枚入っている場合を考える。

以下では、6 回目の試行で初めて A, B, C, D がそろうとは、6 回の試行で \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} , \boxed{D} のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され、かつ \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} , \boxed{D} のうちいずれか 1 枚が 6 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。

また、3 以上 5 以下の自然数 n に対し、6 回の試行のうち n 回目の試行で初めて A, B, C だけがそろうとは、6 回の試行のうち 1 回目から n 回目の試行で、 \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され、 \boxed{D} は 1 回も取り出されず、かつ \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} のうちいずれか 1 枚が n 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。6 回の試行のうち n 回目の試行で初めて B, C, D だけがそろうなども同様に定める。

(数学 I ・ 数学 A 第 3 問は次ページに続く。)

数学 I ・ 数学 A

太郎さんと花子さんは、6回目の試行で初めて A, B, C, D がそろそろ確率について考えている。

太郎：例えば、5回目までに A , B , C のそれぞれが少なくとも1回は取り出され、かつ6回目に初めて D が取り出される場合を考えたら計算できそうだね。

花子：それなら、初めて A, B, C だけがそろそろのとき、3回目のとき、4回目のとき、5回目のときで分けて考えてみてはどうか。

6回の試行のうち3回目の試行で初めて A, B, C だけがそろそろ取り出し方が 6 通りであることに注意すると、「6回の試行のうち3回目の試行で初めて A, B, C だけがそろい、かつ6回目の試行で初めて D が取り出される」取り出し方は 54 通りあることがわかる。

同じように考えると、「6回の試行のうち4回目の試行で初めて A, B, C だけがそろい、かつ6回目の試行で初めて D が取り出される」取り出し方は 54 通りあることもわかる。

以上のように考えることにより、6回目の試行で初めて A, B, C, D がそろそろ確率は $\frac{75}{512}$ であることがわかる。

- (2)(i) ① ② ③ ④ ⑤ ⑥
A, B, C だけがそろい × 3通り × 3通り × 3通り = 54 (通り)
- (2)(ii) ① ② ③ ④ ⑤ ⑥
A, B, C だけがそろい × 3通り × 3通り = 54 (通り)
- (2)(iii) ① ② ③ ④ ⑤ ⑥
A, B, C だけがそろい × 3通り × 3通り = 54 (通り)

6回目の試行で初めて A, B, C, D がそろそろ確率は (2)(i), (2)(ii), (2)(iii) をすべて足して 4 (通り) あることから

$$\frac{(54 + 54 + 54) \times 4}{4^6} = \frac{150 \times 4}{4^5 \cdot 4} = \frac{75}{512}$$

補 (2)(i), (2)(ii), (2)(iii) は 5回目までに A, B, C の3種類がそろわぬ1種類または2種類をのぞくことを考えると

$$3^5 - \{3 + 3(2^5 - 2)\} = 243 - (3 + 90) = 150 \text{ (通り)}$$

1種類	① ② ③ ④ ⑤	}	3 (通り)
A	A A A A A		
B	B B B B B		
2種類	C C C C C	}	3(2^5 - 2) (通り)
A, B のみの2種類			
B, C のみの2種類			
C, A のみの2種類			

のぞく