数学Ⅱ

第４問 （配点　20）

座標平面において，方程式 $x^2 + y^2 = 4$ が表す円を C_1，$x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$ が表す円を C_2 とする。

必要に応じて，次のことを用いてもよい。

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離を d とするとき

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる。

(1)　C_2 の中心は点 $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$，半径は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線の方程式を求める方法について考えよう。

次の**方針**に基づいて考える。

方針

C_1 の接線のうち，C_2 にも接するものを求める。

C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ をとり，P における C_1 の接線を ℓ とする。P は C_1 上にあるので

$$p^2 + q^2 = 4$$

が成り立つ。

(i) ℓ の方程式を求めよう。

$p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ の場合を考える。原点 $(0,\ 0)$ と P を結ぶ直線を m とすると，ℓ と m は垂直である。m の傾きは $\boxed{\text{エ}}$ であるので，ℓ の傾きは $\boxed{\text{オ}}$ となる。よって，ℓ の方程式は $\boxed{\text{カ}}$ となる。

$p = 0$ または $q = 0$ の場合も，$\boxed{\text{カ}}$ の表す直線は，P における C_1 の接線となることがわかる。

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ p	① q	② $-p$	③ $-q$
④ $\dfrac{1}{p}$	⑤ $\dfrac{1}{q}$	⑥ $-\dfrac{1}{p}$	⑦ $-\dfrac{1}{q}$
⑧ $\dfrac{q}{p}$	⑨ $\dfrac{p}{q}$	ⓐ $-\dfrac{q}{p}$	ⓑ $-\dfrac{p}{q}$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $px + qy = 2$	① $px - qy = 2$	② $qx + py = 2$
③ $qx - py = 2$	④ $px + qy = 4$	⑤ $px - qy = 4$
⑥ $qx + py = 4$	⑦ $qx - py = 4$	

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

(ii) ℓ が C_2 に接するのは， $\boxed{キ}$ ときである。

$\boxed{キ}$ の解答群

⓪ ℓ が x 軸に平行である

① ℓ が y 軸に平行である

② ℓ が C_2 の中心を通る

③ C_2 の中心と ℓ の距離が，C_1 の半径に等しい

④ C_2 の中心と ℓ の距離が，C_2 の半径に等しい

(数学Ⅱ第 4 問は次ページに続く。)

(iii) (i), (ii)での考察から，次のことがわかる。

ℓ が C_2 に接するときのPの座標は

$$(p,\ q)=\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}\right),\quad \left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ -\frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}\right),$$

$$\left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}\right),\quad \left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}},\ -\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)$$

である。ただし，$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}<\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ とする。よって，これらの p，q の組を $\boxed{\boxed{\text{カ}}}$ に代入すれば，C_1 と C_2 の両方に接する直線の方程式が得られる。