数学Ⅱ

第2問 （配点　30）

m を $m>1$ を満たす定数とし，$f(x)=3(x-1)(x-m)$ とする。また，$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とする。関数 $y=f(x)$ と $y=S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

(1)　$m=2$ のとき，すなわち，$f(x)=3(x-1)(x-2)$ のときを考える。

(i)　$f'(x)=0$ となる x の値は $x=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(ii)　$S(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned}S(x)&=\int_0^x f(t)\,dt\\&=\int_0^x\left(3t^2-\boxed{\text{ウ}}\,t+\boxed{\text{エ}}\right)dt\\&=x^3-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^2+\boxed{\text{キ}}\,x\end{aligned}$$

であるから

$x=\boxed{\text{ク}}$ のとき，$S(x)$ は極大値 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ をとり

$x=\boxed{\text{サ}}$ のとき，$S(x)$ は極小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとることがわかる。

（数学Ⅱ第2問は次ページに続く。）

(iii) $f(3)$と一致するものとして，次の⓪～④のうち，正しいものは $\boxed{ス}$ である。

$\boxed{ス}$ の解答群

⓪ $S(3)$

① 2点$(2,\ S(2))$，$(4,\ S(4))$を通る直線の傾き

② 2点$(0,\ 0)$，$(3,\ S(3))$を通る直線の傾き

③ 関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点$(3,\ S(3))$における接線の傾き

④ 関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点$(3,\ f(3))$における接線の傾き

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1，$1 \leqq x \leqq m$ の範囲で，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_1 = \boxed{セ}$，$S_2 = \boxed{ソ}$ である。

$S_1 = S_2$ となるのは $\boxed{タ} = 0$ のときであるから，$S_1 = S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{チ}$ である。また，$S_1 > S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{ツ}$ である。

$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

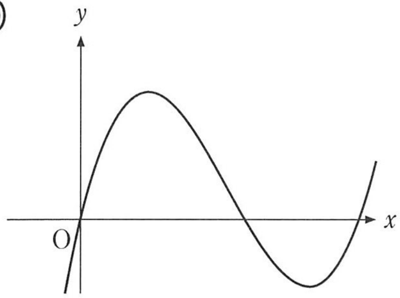
⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$	② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$
③ $\displaystyle\int_0^1 \{-f(x)\}\,dx$	④ $\displaystyle\int_0^m \{-f(x)\}\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$

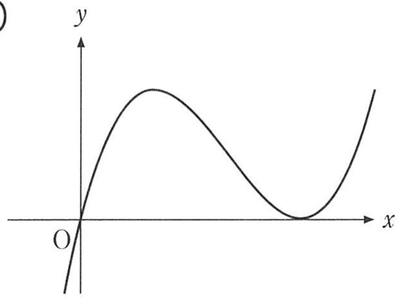
$\boxed{タ}$ の解答群

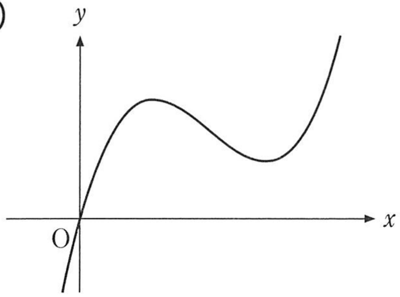
⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$
② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$	③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^m f(x)\,dx$
④ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^m f(x)\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^m f(x)\,dx$
⑥ $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx + \int_1^m f(x)\,dx$	

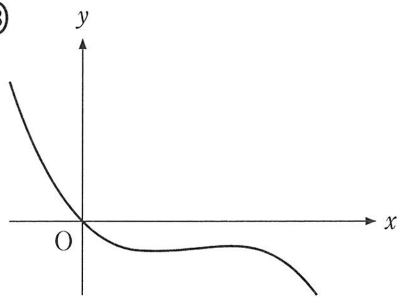
(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

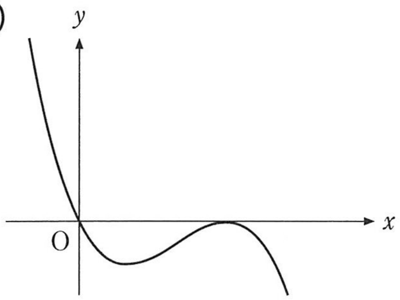
$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

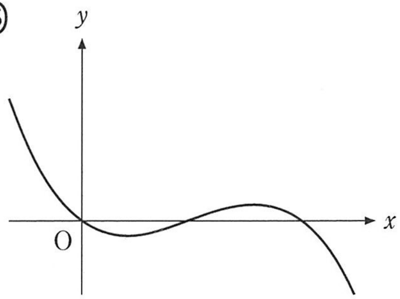
⓪


①


②


③


④


⑤


（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

(3) 関数 $y=f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y=S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう。

関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\boxed{テ}$ に関して対称であるから，すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^{1} f(x)\,dx=\int_{m}^{\boxed{ト}} f(x)\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立ち，$M=\boxed{テ}$ とおくと $0<q\leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して

$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}\,dx=\int_{M}^{\boxed{ナ}}\{-f(x)\}\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。すべての実数 α，β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=S(\beta)-S(\alpha)$$

が成り立つことに注意すれば，① と ② はそれぞれ

$$S(1-p)+S\left(\boxed{ト}\right)=\boxed{ニ}$$

$$2S(M)=\boxed{ヌ}$$

となる。

以上から，すべての正の実数 p に対して，2点 $(1-p,\ S(1-p))$，$\left(\boxed{ト},\ S\left(\boxed{ト}\right)\right)$ を結ぶ線分の中点についての記述として，後の⓪～⑤のうち，最も適当なものは $\boxed{ネ}$ である。

(数学Ⅱ第２問は次ページに続く。)

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ m	① $\dfrac{m}{2}$	② $m+1$	③ $\dfrac{m+1}{2}$

$\boxed{ト}$ の解答群

⓪ $1-p$	① p	② $1+p$
③ $m-p$	④ $m+p$	

$\boxed{ナ}$ の解答群

⓪ $M-q$	① M	② $M+q$
③ $M+m-q$	④ $M+m$	⑤ $M+m+q$

$\boxed{ニ}$ の解答群

⓪ $S(1)+S(m)$	① $S(1)+S(p)$	② $S(1)-S(m)$
③ $S(1)-S(p)$	④ $S(p)-S(m)$	⑤ $S(m)-S(p)$

$\boxed{ヌ}$ の解答群

⓪ $S(M-q)+S(M+m-q)$	① $S(M-q)+S(M+m)$
② $S(M-q)+S(M)$	③ $2S(M-q)$
④ $S(M+q)+S(M-q)$	⑤ $S(M+m+q)+S(M-q)$

$\boxed{ネ}$ の解答群

⓪ x 座標は p の値によらず一つに定まり，y 座標は p の値により変わる。
① x 座標は p の値により変わり，y 座標は p の値によらず一つに定まる。
② 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。
③ 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。
④ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。
⑤ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。