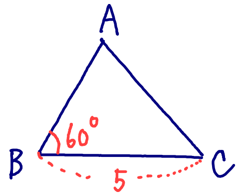
第２問　（配点　30）



〔１〕　△ABC において，BC = 5，∠ABC = 60° とする。

(10点)

(1)　△ABC の外接円の半径が $\sqrt{7}$ のとき，AC = $\sqrt{\boxed{21}}$ であり，(2点)

AB = $\boxed{1}$ または AB = $\boxed{4}$ である。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答の順序は問わない。(3点)

したがって，外接円の半径が $\sqrt{7}$ であるような △ABC は二つある。

（数学Ⅰ第２問は次ページに続く。）

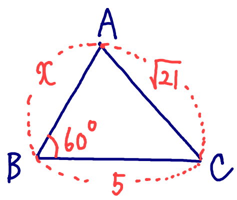
△ABC に正弦定理を用いて

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{7}$$

よって　$AC = 2\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{21}}$ // アイ

$AB = x \ (>0)$

として △ABC に余弦定理を用いて



$$(\sqrt{21})^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}$$

$$21 = x^2 + 25 - 5x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

よって　$x = \boxed{1,\ 4}$ // エ，オ

(2) △ABC の外接円の半径を R とするとき，$R = \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$ または

(2点)

$R \geqq \dfrac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}$ であることは，△ABC が一通りに決まるための必要十分条件である。

(3点)

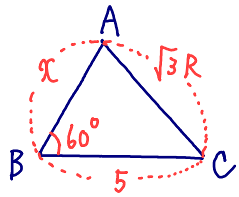
(数学Ⅰ第2問は次ページに続く。)

(1)と同様に考える

△ABC に正弦定理を用いて

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R$$

よって $AC = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R$



$AB = x\ (>0)$

として △ABC に余弦定理を用いて

$$(\sqrt{3}R)^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}$$

$$3R^2 = x^2 + 25 - 5x$$

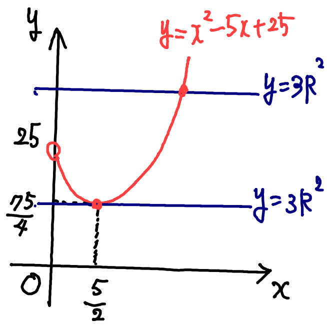
$$= x^2 - 5x + 25$$

△ABC が一通りに決まる必要十分条件は

上の式をみたす $x>0$ となる x がただ一つあることである.

これは

$$\begin{cases} y = 3R^2 \\ y = x^2 - 5x + 25 \\ \quad = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{4} \end{cases}$$



のグラフが $x>0$ でただ一つの共有点をもつことから

$3R^2 = \frac{75}{4}$ または $3R^2 \geqq 25$

$\Leftrightarrow$ $R^2 = \frac{25}{4}$ または $R^2 \geqq \frac{25}{3}$

よって $R = \boxed{\frac{5}{2}}$ オカ または $R \geqq \frac{5}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$ キク ケ