

数学Ⅱ・数学B

[2]

(12点)

- (1) $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ のとき, $\log_a b = x$ とおくと, $\boxed{(2)}$ が成り立つ。
(3点)

$a^x = b$ ← 対数の定義

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

① $x^a = b$	④ $x^b = a$
② $a^x = b$	⑤ $b^x = a$
③ $a^b = x$	⑥ $b^a = x$

- (2) 様々な対数の値が有理数か無理数かについて考えよう。

- (i) $\log_5 25 = \boxed{2}$, $\log_9 27 = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$ であり, どちらも有理数である。
(2点) (2点)

$\log_5 5^2$ $\log_3 3^3$
 // //

(1) $a=2, b=3, x=\frac{p}{q}$

- (ii) $\log_2 3$ が有理数と無理数のどちらであるかを考えよう。

$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると, $\log_2 3 > 0$ であるので, 二つの自然数 p, q を用いて $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ と表すことができる。このとき, (1) より $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ は $\boxed{(5)}$ と変形できる。いま, 2 は偶数であり 3 は奇数であるので, $\boxed{2^p = 3^q}$ を満たす自然数 p, q は存在しない。
 したがって, $\log_2 3$ は無理数であることがわかる。

$2^{\frac{p}{q}} = 3$
 両辺を q 乗
 $(2^{\frac{p}{q}})^q = 3^q$
 $2^p = 3^q$
 (5) =

$2 \cdot 2 \cdots 2 = 3 \cdot 3 \cdots 3$
 p個 q個

a と b のいずれか一方が偶数と、もう一方が奇数

- (iii) a, b を 2 以上の自然数とするとき, (ii) と同様に考えると, 「 $\boxed{(5)}$ ならば $\log_a b$ はつねに無理数である」ことがわかる。
(3点)

逆は成り立たない

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

二の解答群

- | | | |
|----------------|---------------|---------------|
| ② $p^2 = 3q^2$ | ① $q^2 = p^3$ | ② $2^a = 3^b$ |
| ③ $p^3 = 2q^3$ | ④ $p^2 = q^3$ | ⑤ $2^b = 3^a$ |

又の解答群

- | | |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| ② a が偶数 | ← a, b がともに奇数の場合は
(i)より $\log_a b$ は有理数である |
| ① b が偶数 | |
| ② a が奇数 | |
| ③ b が奇数 | |
| ④ a と b がともに偶数, または a と b がともに奇数 | |
| ⑤ a と b のいずれか一方が偶数で, もう一方が奇数 | |

(iii) a, b を2以上の自然数とし, $\log_a b$ が有理数とすると $\log_a b > 0$ であり (ii)と同様に 2つの自然数 p, q を用いて

$$\log_a b = \frac{p}{q}$$

と表せば

$$a^{\frac{p}{q}} = b$$

両辺を q 乗して

$$a^p = b^q$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{p \text{ 個}} = \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{q \text{ 個}}$$

← a と b が異なる素因数をもちば成り立たない

⑤の①~⑤をみれば, a と b のいずれか一方が偶数で, もう一方が奇数ならば常に成り立たない。

よって ⑤ならば $\log_a b$ は無理数

補 ⑤ $\log_a b$ が無理数であることの十分条件を求めるときには注意

2つの問題には
よく似た気配がある...

$$\log_5 25 = 2$$

$$\log_9 27 = \frac{3}{2}$$

a, b がともに偶数の場合は

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_4 8 = \frac{3}{2}$$

など $\log_a b$ は有理数である