

数学Ⅱ・数学B

[2]

(12点)

- (1)  $a > 0, a \neq 1, b > 0$  のとき,  $\log_a b = x$  とおくと,  $\boxed{(2)}$  が成り立つ。  
(3点)

$a^x = b$  ← 対数の定義

$\boxed{\text{ツ}}$  の解答群

① $x^a = b$	④ $x^b = a$
② $a^x = b$	⑤ $b^x = a$
③ $a^b = x$	⑥ $b^a = x$

- (2) 様々な対数の値が有理数か無理数かについて考えよう。

- (i)  $\log_5 25 = \boxed{2}$ ,  $\log_9 27 = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$  であり, どちらも有理数である。  
(2点) (2点)

$\log_5 5^2$        $\log_3 3^3$   
 //                    //

$(1) \rightarrow a=2, b=3, x=\frac{p}{q}$

- (ii)  $\log_2 3$  が有理数と無理数のどちらであるかを考えよう。

$\log_2 3$  が有理数であると仮定すると,  $\log_2 3 > 0$  であるので, 二つの自然数  $p, q$  を用いて  $\log_2 3 = \frac{p}{q}$  と表すことができる。このとき, (1) より  $\log_2 3 = \frac{p}{q}$  は  $\boxed{(5)}$  と変形できる。いま, 2 は偶数であり 3 は奇数であるので,  $\boxed{2^p = 3^q}$  を満たす自然数  $p, q$  は存在しない。  
 したがって,  $\log_2 3$  は無理数であることがわかる。

$2^{\frac{p}{q}} = 3$   
 両辺を  $q$  乗  
 $(2^{\frac{p}{q}})^q = 3^q$   
 $2^p = 3^q$   
 $(5) =$

$2 \cdot 2 \cdots 2 = 3 \cdot 3 \cdots 3$   
 p個                    q個

$a$  と  $b$  のいずれか一方が偶数と、もう一方が奇数

- (iii)  $a, b$  を 2 以上の自然数とするとき, (ii) と同様に考えると, 「 $\boxed{(5)}$  ならば  $\log_a b$  はつねに無理数である」ことがわかる。  
(3点)

逆は成り立たないよ!!

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

二の解答群

- |                |               |               |
|----------------|---------------|---------------|
| ② $p^2 = 3q^2$ | ① $q^2 = p^3$ | ② $2^a = 3^b$ |
| ③ $p^3 = 2q^3$ | ④ $p^2 = q^3$ | ⑤ $2^b = 3^a$ |

又の解答群

- |  |   |
|--|---|
| ② $a$ が偶数                                | <p>← <math>a, b</math>がともに奇数の場合は<br/>(i)より <math>\log_a b</math>は有理数である</p> |
| ① $b$ が偶数                                |   |
| ② $a$ が奇数                                |   |
| ③ $b$ が奇数                                |   |
| ④ $a$ と $b$ がともに偶数, または $a$ と $b$ がともに奇数 |   |
| ⑤ $a$ と $b$ のいずれか一方が偶数で, もう一方が奇数         |   |

(iii)  $a, b$ を2以上の自然数とし,  $\log_a b$ が有理数とすると  $\log_a b > 0$  であり (ii)と同様に 2つの自然数  $p, q$  を用いて

$$\log_a b = \frac{p}{q}$$

と表せ

$$a^{\frac{p}{q}} = b$$

両辺を  $q$  乗して

$$a^p = b^q$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{p \text{個}} = \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{q \text{個}}$$

←  $a$ と $b$ が異なる素因数をもてば成り立たない

⑤の①~⑤をみれば,  $a$ と $b$ のいずれか一方が偶数で, もう一方が奇数ならば常に成り立たない。

よって ⑤ならば  $\log_a b$ は無理数

補 ⑤  $\log_a b$ は無理数であることの十分条件を求めようとするには足りない

$\log_5 25 = 2$   
 $\log_9 27 = \frac{3}{2}$   
 $\log_2 8 = 3$   
 $\log_4 8 = \frac{3}{2}$   
 など  $\log_a b$ は有理数である  
 $a, b$ がともに偶数の場合は

2つの問題には  
よく似た気はする...