第5問 （選択問題）（配点　20）

三角錐（すい）PABC において，辺 BC の中点を M とおく。また，$\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PAC}$ とし，この角度を θ とおく。ただし，$0° < \theta < 90°$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せる。また

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \boxed{\boxed{\text{オ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

$\boxed{\boxed{\text{オ}}}$ の解答群

⓪ $\sin\theta$	① $\cos\theta$	② $\tan\theta$
③ $\dfrac{1}{\sin\theta}$	④ $\dfrac{1}{\cos\theta}$	⑤ $\dfrac{1}{\tan\theta}$
⑥ $\sin\angle\mathrm{BPC}$	⑦ $\cos\angle\mathrm{BPC}$	⑧ $\tan\angle\mathrm{BPC}$

(2) $\theta = 45°$ とし，さらに

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = 3\sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 3, \quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = 3$$

が成り立つ場合を考える。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{\text{カ}}$$

である。さらに，直線 AM 上の点 D が $\angle\mathrm{APD} = 90°$ を満たしているとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(3)

$$\overrightarrow{AQ} = \boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{AM}$$

で定まる点をQとおく。$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直である三角錐PABCはどのようなものかについて考えよう。例えば(2)の場合では，点Qは点Dと一致し，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ は垂直である。

(i) $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$ を用いて表して考えると，$\boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。さらに①に注意すると，$\boxed{\text{ク}}$ から $\boxed{\text{ケ}}$ が成り立つことがわかる。

したがって，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であれば，$\boxed{\text{ケ}}$ が成り立つ。逆に，$\boxed{\text{ケ}}$ が成り立てば，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ は垂直である。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}$

① $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}$

② $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

③ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

④ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

⑤ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}\,|\overrightarrow{BC}|$

① $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = 2\,|\overrightarrow{BC}|$

② $|\overrightarrow{AB}|\sin\theta + |\overrightarrow{AC}|\sin\theta = |\overrightarrow{AP}|$

③ $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta + |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AP}|$

④ $|\overrightarrow{AB}|\sin\theta = |\overrightarrow{AC}|\sin\theta = 2\,|\overrightarrow{AP}|$

⑤ $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = 2\,|\overrightarrow{AP}|$

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(ii) k を正の実数とし

$$k\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

が成り立つとする。このとき，$\boxed{\text{コ}}$ が成り立つ。

また，点Bから直線APに下ろした垂線と直線APとの交点をB′とし，同様に点Cから直線APに下ろした垂線と直線APとの交点をC′とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，$\boxed{\text{サ}}$ であることと同値である。特に $k=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，$\boxed{\text{シ}}$ であることと同値である。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $k\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$	① $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|=k\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$
② $k\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\|=\sqrt{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|$	③ $k\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\|=\sqrt{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ B′とC′がともに線分APの中点

① B′とC′が線分APをそれぞれ $(k+1):1$ と $1:(k+1)$ に内分する点

② B′とC′が線分APをそれぞれ $1:(k+1)$ と $(k+1):1$ に内分する点

③ B′とC′が線分APをそれぞれ $k:1$ と $1:k$ に内分する点

④ B′とC′が線分APをそれぞれ $1:k$ と $k:1$ に内分する点

⑤ B′とC′がともに線分APを $k:1$ に内分する点

⑥ B′とC′がともに線分APを $1:k$ に内分する点

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ △PAB と △PAC がともに正三角形

① △PAB と △PAC がそれぞれ $\angle \mathrm{PBA} = 90^\circ$，$\angle \mathrm{PCA} = 90^\circ$ を満たす直角二等辺三角形

② △PAB と △PAC がそれぞれ $\mathrm{BP} = \mathrm{BA}$，$\mathrm{CP} = \mathrm{CA}$ を満たす二等辺三角形

③ △PAB と △PAC が合同

④ $\mathrm{AP} = \mathrm{BC}$