第１問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 三角関数の値の大小関係について考えよう。

(18点)

(1) $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $\sin x$ $\boxed{\text{ア}}$ $\sin 2x$ であり，$x = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき

<
0
(1点)

$\sin x$ $\boxed{\text{イ}}$ $\sin 2x$ である。

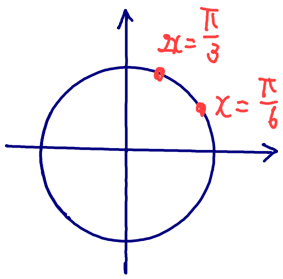
>
2
(1点)

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ ＜	① ＝	② ＞

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）

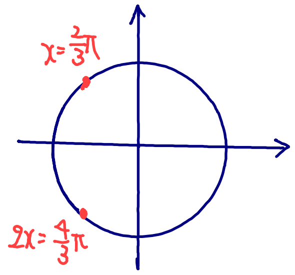
(1) $x=\frac{\pi}{6}$ のとき



$\sin x \boxed{<} \sin 2x$

⓪ア

(2) $x=\frac{2}{3}\pi$ のとき



$\sin x \boxed{>} \sin 2x$

② イ

(2) $\sin x$ と $\sin 2x$ の値の大小関係を詳しく調べよう。

$$\sin 2x - \sin x = \sin x\left(\boxed{2}\cos x - \boxed{1}\right)$$ (2点)

$\sin 2x - \sin x = 2\sin x\cos x - \sin x$

$= \boxed{\sin x(2\cos x - 1)}$

ウ　エ

であるから，$\sin 2x - \sin x > 0$ が成り立つことは

「$\sin x > 0$ かつ $\boxed{2}\cos x - \boxed{1} > 0$」 ……………… ①

または

「$\sin x < 0$ かつ $\boxed{2}\cos x - \boxed{1} < 0$」 ……………… ②

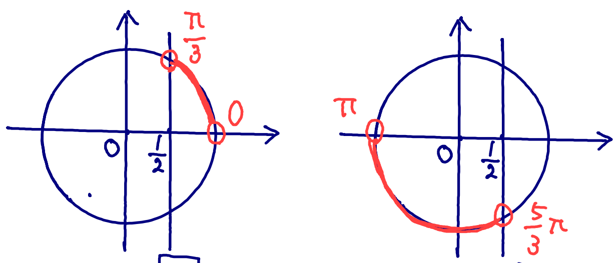
が成り立つことと同値である。$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，① が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{\boxed{3}}$$ (2点)

であり，② が成り立つような x の値の範囲は

$$\pi < x < \frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}\pi$$ (2点)

①は $\sin x > 0$ かつ $\cos x > \frac{1}{2}$　②は $\sin x < 0$ かつ $\cos x < \frac{1}{2}$



$0 < x < \boxed{\frac{\pi}{3}}$ オ　または　$\pi < x < \boxed{\frac{5}{3}\pi}$ カ キ

である。よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x > \sin x$ が成り立つような x の値の範囲は

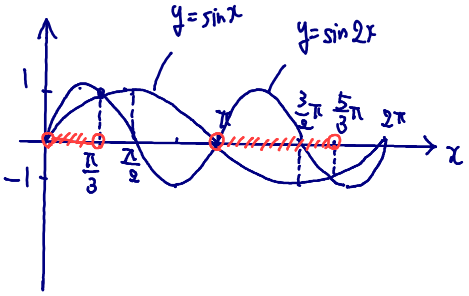
$$0 < x < \frac{\pi}{\boxed{3}}, \quad \pi < x < \frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}\pi$$

← マークなので $\sin 2x = \sin x$ となる $x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ が埋まる

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

補



$\begin{cases} y=\sin x \\ y=\sin 2x \end{cases}$ のグラフを考えてもよい

(3)　$\sin 3x$ と $\sin 4x$ の値の大小関係を調べよう。

三角関数の加法定理を用いると，等式

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ③$$

が得られる。$\alpha+\beta=4x$，$\alpha-\beta=3x$ を満たす α，β に対して③を用いることにより，$\sin 4x-\sin 3x>0$ が成り立つことは

「$\cos$ [ク ⓐ] >0　かつ　$\sin$ [ケ ⑦] >0」　……④

$\frac{7}{2}x$　　$\frac{x}{2}$　　(2点)

または

「$\cos$ [$\frac{7}{2}x$] <0　かつ　$\sin$ [$\frac{x}{2}$] <0」　……⑤

が成り立つことと同値であることがわかる。

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，④，⑤により，$\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0<x<\frac{\pi}{\boxed{7}},\qquad \frac{\boxed{3}}{\boxed{7}}\pi<x<\frac{\boxed{5}}{\boxed{7}}\pi$$

である。　(2点)　(2点)

[ク]，[ケ] の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① x	② $2x$	③ $3x$
④ $4x$	⑤ $5x$	⑥ $6x$	ケ ⑦ $\frac{x}{2}$
⑧ $\frac{3}{2}x$	⑨ $\frac{5}{2}x$	ク ⓐ $\frac{7}{2}x$	ⓑ $\frac{9}{2}x$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$+)\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\begin{cases}\alpha+\beta=4x\\ \alpha-\beta=3x\end{cases}$ とすると

$\alpha=\frac{7}{2}x,\ \beta=\frac{x}{2}$

$\sin 4x-\sin 3x$

$=2\cos\frac{7}{2}x\sin\frac{x}{2}$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき　$0\leqq\frac{7}{2}x\leqq\frac{7}{2}\pi$

$0\leqq\frac{x}{2}\leqq\frac{\pi}{2}$

これより　$\sin\frac{x}{2}\geqq 0$　なので⑤をみたすことはない

④について

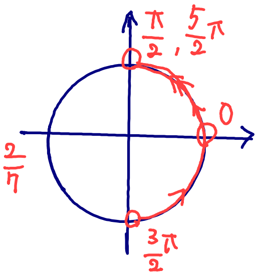
$\sin\frac{x}{2}>0$ ならば $0<x\leqq\pi$

このもとで　$\cos\frac{7}{2}x>0$ とすると

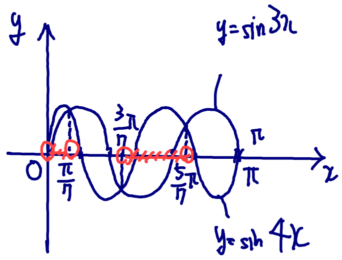
$0<\frac{7}{2}x<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi<\frac{7}{2}x<\frac{5}{2}\pi$　　$2\times\frac{2}{7}$

よって　$\boxed{0<x<\frac{\pi}{7},\ \frac{3}{7}\pi<x<\frac{5}{7}\pi}$

コ　サ シ　ス セ



補　$\begin{cases}y=\sin 3x\\ y=\sin 4x\end{cases}$ のグラフを考えてもよい



(数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。)

前問を使う

(4) (2), (3)の考察から，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つような x の値の範囲は

あ　い

$$\frac{\pi}{\boxed{7}} < x < \frac{\pi}{\boxed{6}}, \quad \frac{\boxed{5}}{\boxed{7}}\pi < x < \frac{\boxed{5}}{\boxed{6}}\pi$$

(2点)　(2点)

であることがわかる。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき

あ　$\sin 3x > \sin 4x$

ならば

$\sin 4x - \sin 3x < 0$

より(3)から

$\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi, \ \frac{5}{7}\pi < x < \pi$

← (3)は $\sin 4x - \sin 3x \geqq 0$

なので(2)以外で等号がない範囲

い　$\sin 4x > \sin 2x$

ならば

$\sin 4x - \sin 2x > 0$

$0 \leqq 2x \leqq 2\pi$ より(2)で x を $2x$ として

$0 < 2x < \frac{\pi}{3}, \ \pi < 2x < \frac{5}{3}\pi$　$2 \times \frac{1}{2}$

$\therefore \ 0 < x < \frac{\pi}{6}, \ \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$

い (2)から

$0 \leqq X \leqq 2\pi$

のとき　$\sin 2X - \sin X > 0$

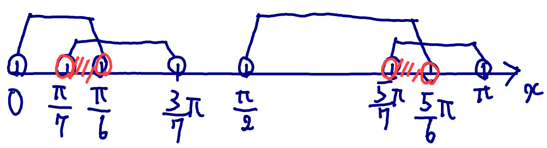
とすると

$0 < X < \frac{\pi}{3}, \ \pi < X < \frac{5}{3}\pi$

となることから $X = 2x$ とした

$\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つのは あ かつ い より

あ　い



$$\boxed{\frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{6}, \ \frac{5}{7}\pi < x < \frac{5}{6}\pi}$$

ソ　タ チ