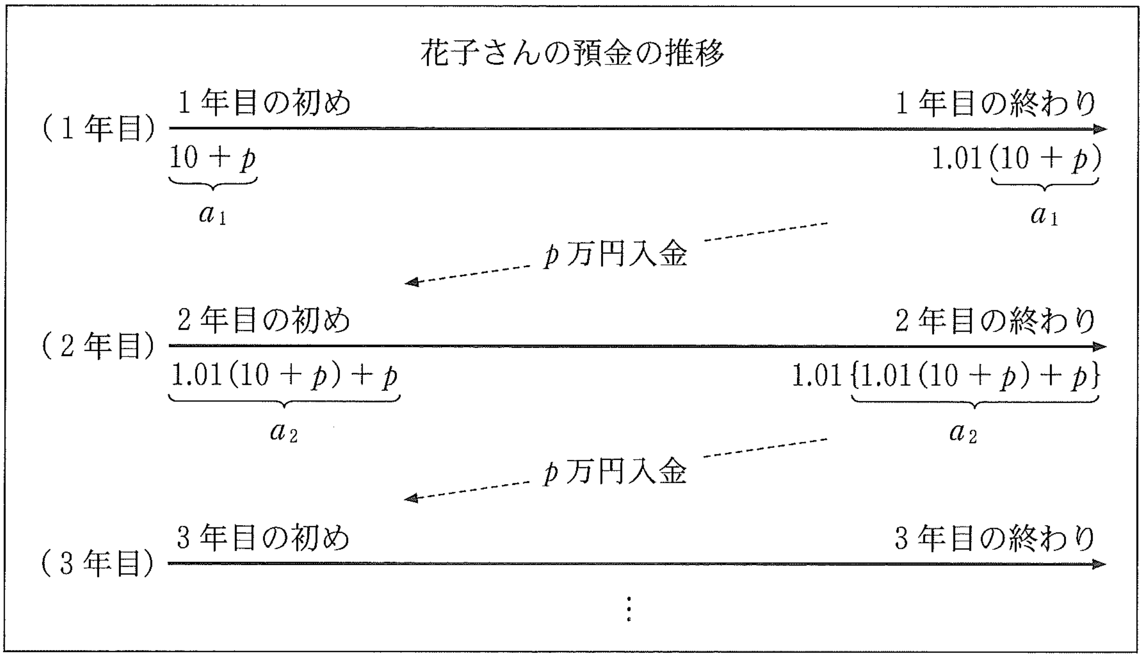
第4問 （選択問題）（配点　20）

花子さんは，毎年の初めに預金口座に一定額の入金をすることにした。この入金を始める前における花子さんの預金は10万円である。ここで，預金とは預金口座にあるお金の額のことである。預金には年利1％で利息がつき，ある年の初めの預金がx万円であれば，その年の終わりには預金は$1.01x$万円となる。次の年の初めには$1.01x$万円に入金額を加えたものが預金となる。

x (万円)
↓ +1%
$x + \frac{1}{100}x$
元金　利息
$= (1 + \frac{1}{100})x$
$= 1.01x$

毎年の初めの入金額をp万円とし，n年目の初めの預金をa_n万円とおく。ただし，$p>0$とし，nは自然数とする。

例えば，$a_1 = 10 + p$，$a_2 = 1.01\underbrace{(10 + p)}_{a_1} + p$である。



参考図

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

$(n+1)$年目の初め ← p万円入金 ← n年目の終わり
$1.01a_n$

$a_{n+1} = 1.01a_n + p$

(1)　a_n を求めるために二つの方針で考える。

方針1

n 年目の初めの預金と$(n+1)$年目の初めの預金との関係に着目して考える。

3年目の初めの預金 a_3 万円について，$a_3 = \boxed{2}$ である。すべての自然数 n について

(2点)

$$a_{n+1} = \boxed{0}\, a_n + \boxed{3}$$

(3点)

が成り立つ。これは

$$a_{n+1} + \boxed{4} = \boxed{0}\left(a_n + \boxed{100p}\right)$$

と変形でき，a_n を求めることができる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $1.01\{1.01(10+p)+p\}$	① $1.01\{1.01(10+p)+1.01p\}$
② $1.01\{1.01(10+p)+p\}+p$	③ $1.01\{1.01(10+p)+p\}+1.01p$
④ $1.01(10+p)+1.01p$	⑤ $1.01(10+1.01p)+1.01p$

$\boxed{\text{イ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

イ オ ⓪ 1.01	① 1.01^{n-1}	② 1.01^n
ウ ③ p	エ ④ $100p$	⑤ np
⑥ $100np$	⑦ $1.01^{n-1}\times 100p$	⑧ $1.01^n \times 100p$

$a_1 = 10 + p$

$a_2 = 1.01a_1 + p$

$a_3 = 1.01a_2 + p$

$= 1.01\{1.01(10+p)+p\}+p$

⋮　② ア

$\boxed{a_{n+1} = 1.01a_n + p}$　⓪イ ③ウ

$-)\ \alpha = 1.01\alpha + p \iff \alpha = -100p$

$a_{n+1} - \alpha = 1.01(a_n - \alpha)$

変形して $\boxed{a_{n+1} + 100p = 1.01(a_n + 100p)}$

④エ ⓪オ

数列$\{a_n + 100p\}$は 初項 $a_1 + 100p$

$= 10 + p + 100p$

$= 101p + 10$

$= 100\cdot 1.01p + 10$

公比が 1.01 の等比数列である，

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

$a_n + 100p = (100\cdot 1.01p + 10)\,1.01^{n-1}$

$= 100p\cdot 1.01^n + 10\cdot 1.01^{n-1}$

よって　$a_n = 100p(1.01^n - 1) + 10\cdot 1.01^{n-1}$

方針 2

もともと預金口座にあった 10 万円と毎年の初めに入金した p 万円について，n 年目の初めにそれぞれがいくらになるかに着目して考える。

もともと預金口座にあった 10 万円は，2 年目の初めには 10×1.01 万円になり，3 年目の初めには 10×1.01^2 万円になる。同様に考えると n 年目の初めには $10 \times 1.01^{n-1}$ 万円になる。

- 1 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p \times 1.01^{\boxed{\text{カ}}}$ 万円になる。（$n-1$　②）
- 2 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p \times 1.01^{\boxed{\text{キ}}}$ 万円になる。（③　$n-2$）　（カ,キ両方正解で2点）

$\vdots$

- n 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには p 万円のままである。

これより

$$a_n = 10 \times 1.01^{n-1} + p \times 1.01^{\boxed{\text{カ}}} + p \times 1.01^{\boxed{\text{キ}}} + \cdots + p$$

（$n-1$，$n-2$）　$= 10\times1.01^{n-1} + p\sum_{k=1}^{n} 1.01^{k-1}$

$$= 10 \times 1.01^{n-1} + p \sum_{k=1}^{n} 1.01^{\boxed{\text{ク}}}$$

（②　$k-1$　(2点)）　←右からたす

となることがわかる。ここで，$\sum_{k=1}^{n} 1.01^{\boxed{\text{ク}}} = \boxed{\quad\text{ケ}\quad}$ となるので，a_n を求めることができる。

（$k-1$　①　$100(1.01^n-1)$　(2点)）

$\sum_{k=1}^{n} 1.01^{k-1} = \dfrac{1.01^n - 1}{1.01 - 1} = \boxed{100(1.01^n-1)}$　①ケ

$\therefore a_n = 10\times1.01^{n-1} + 100p(1.01^n-1)$ …(*)

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $n+1$	① n	② $n-1$　カ	③ $n-2$　キ

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $k+1$	① k	② $k-1$	③ $k-2$

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ 100×1.01^n	① $100(1.01^n - 1)$
② $100(1.01^{n-1} - 1)$	③ $n + 1.01^{n-1} - 1$
④ $0.01(101n - 1)$	⑤ $\dfrac{n \times 1.01^{n-1}}{2}$

（数学Ⅱ・数学B第 4 問は次ページに続く。）

⑵ 花子さんは，10 年目の終わりの預金が 30 万円以上になるための入金額について考えた。

10年目の初めの預金a_{10}に1%の利息がついたもの

10 年目の終わりの預金が 30 万円以上であることを不等式を用いて表すと

初めではない!

$1.01a_{10}$

$\boxed{\text{コ}}$ ③ $\geqq 30$ となる。この不等式を p について解くと

(2点)

$$p \geqq \frac{\boxed{\text{サシ}}\;30 - \boxed{\text{スセ}}\;10 \times 1.01^{10}}{101\left(1.01^{10}-1\right)}$$

(2点)

となる。したがって，毎年の初めの入金額が例えば 18000 円であれば，10 年目の終わりの預金が 30 万円以上になることがわかる。

計算しなくてもよい

$1.01a_{10} \geqq 30$ ③コ

④で $n=10$ として a_{10}を求めて

$1.01\{10\times1.01^9+100p(1.01^{10}-1)\}\geqq30$

$10\times1.01^{10}+101p(1.01^{10}-1)\geqq30$

-10×1.01^{10}

$101p(1.01^{10}-1)\geqq30-10\times1.01^{10}$

よって $\boxed{p\geqq\dfrac{30-10\times1.01^{10}}{101(1.01^{10}-1)}}$

サシ スセ

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ a_{10}	① $a_{10}+p$	② $a_{10}-p$
③ $1.01\,a_{10}$	④ $1.01\,a_{10}+p$	⑤ $1.01\,a_{10}-p$

（数学Ⅱ・数学B第 4 問は次ページに続く。）

(3)　1年目の入金を始める前における花子さんの預金が10万円ではなく，13万円の場合を考える。すべての自然数 n に対して，この場合の n 年目の初めの預金は a_n 万円よりも $\boxed{\text{⑧}}$ 万円多い。なお，年利は1%であり，毎年の初めの入金額は p 万円のままである。
(2点)

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ 3	① 13	② $3(n-1)$
③ $3n$	④ $13(n-1)$	⑤ $13n$
⑥ 3^n	⑦ $3+1.01(n-1)$	⑧ $3\times1.01^{n-1}$
⑨ 3×1.01^n	ⓐ $13\times1.01^{n-1}$	ⓑ 13×1.01^n

預金13万円の場合について n 年目の初めの預金を b_n 万円とすると

13万円は n 年目の初めに $13\cdot1.01^{n-1}$ 万円になることから，方針2を考えて

$$a_n = 10\cdot1.01^{n-1} + \underline{p\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1}}$$

$$b_n = 13\cdot1.01^{n-1} + \underline{p\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1}}$$

同じ

$$b_n - a_n = 13\cdot1.01^{n-1} - 10\cdot1.01^{n-1}$$
$$= \boxed{3\cdot1.01^{n-1}}$$

⑧