第4問 （選択問題）（配点 20）

花子さんは，毎年の初めに預金口座に一定額の入金をすることにした。この入金を始める前における花子さんの預金は10万円である。ここで，預金とは預金口座にあるお金の額のことである。預金には年利1％で利息がつき，ある年の初めの預金が x 万円であれば，その年の終わりには預金は $1.01x$ 万円となる。次の年の初めには $1.01x$ 万円に入金額を加えたものが預金となる。

毎年の初めの入金額を p 万円とし，n 年目の初めの預金を a_n 万円とおく。ただし，$p>0$ とし，n は自然数とする。

例えば，$a_1=10+p$，$a_2=1.01(10+p)+p$ である。

花子さんの預金の推移

（1年目） 1年目の初め $\underbrace{10+p}_{a_1}$ → 1年目の終わり $1.01\underbrace{(10+p)}_{a_1}$

p 万円入金

（2年目） 2年目の初め $\underbrace{1.01(10+p)+p}_{a_2}$ → 2年目の終わり $1.01\underbrace{\{1.01(10+p)+p\}}_{a_2}$

p 万円入金

（3年目） 3年目の初め → 3年目の終わり

⋮

参考図

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(1)　a_n を求めるために二つの方針で考える。

方針 1

n 年目の初めの預金と$(n+1)$年目の初めの預金との関係に着目して考える。

3 年目の初めの預金 a_3 万円について，$a_3 = \boxed{ア}$ である。すべての自然数 n について

$$a_{n+1} = \boxed{イ}\,a_n + \boxed{ウ}$$

が成り立つ。これは

$$a_{n+1} + \boxed{エ} = \boxed{オ}\left(a_n + \boxed{エ}\right)$$

と変形でき，a_n を求めることができる。

$\boxed{ア}$ の解答群

⓪ $1.01\{1.01(10+p)+p\}$	① $1.01\{1.01(10+p)+1.01p\}$
② $1.01\{1.01(10+p)+p\}+p$	③ $1.01\{1.01(10+p)+p\}+1.01p$
④ $1.01(10+p)+1.01p$	⑤ $1.01(10+1.01p)+1.01p$

$\boxed{イ}$ ～ $\boxed{オ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 1.01	① 1.01^{n-1}	② 1.01^n
③ p	④ $100p$	⑤ np
⑥ $100np$	⑦ $1.01^{n-1}\times 100p$	⑧ $1.01^n\times 100p$

(数学Ⅱ・数学B第 4 問は次ページに続く。)

方針2

もともと預金口座にあった10万円と毎年の初めに入金した p 万円について，n 年目の初めにそれぞれがいくらになるかに着目して考える。

もともと預金口座にあった10万円は，2年目の初めには 10×1.01 万円になり，3年目の初めには 10×1.01^2 万円になる。同様に考えると n 年目の初めには $10 \times 1.01^{n-1}$ 万円になる。

- 1年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p \times 1.01^{\boxed{カ}}$ 万円になる。
- 2年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p \times 1.01^{\boxed{キ}}$ 万円になる。

⋮

- n 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには p 万円のままである。

これより

$$a_n = 10 \times 1.01^{n-1} + p \times 1.01^{\boxed{カ}} + p \times 1.01^{\boxed{キ}} + \cdots + p$$
$$= 10 \times 1.01^{n-1} + p\sum_{k=1}^{n} 1.01^{\boxed{ク}}$$

となることがわかる。ここで，$\sum_{k=1}^{n} 1.01^{\boxed{ク}} = \boxed{ケ}$ となるので，a_n を求めることができる。

$\boxed{カ}$，$\boxed{キ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $n+1$	① n	② $n-1$	③ $n-2$

$\boxed{ク}$ の解答群

⓪ $k+1$	① k	② $k-1$	③ $k-2$

$\boxed{ケ}$ の解答群

⓪ 100×1.01^n	① $100(1.01^n - 1)$
② $100(1.01^{n-1} - 1)$	③ $n + 1.01^{n-1} - 1$
④ $0.01(101n - 1)$	⑤ $\dfrac{n \times 1.01^{n-1}}{2}$

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(2) 花子さんは，10 年目の終わりの預金が 30 万円以上になるための入金額について考えた。

10 年目の終わりの預金が 30 万円以上であることを不等式を用いて表すと $\boxed{\text{コ}} \geqq 30$ となる。この不等式を p について解くと

$$p \geqq \frac{\boxed{\text{サシ}} - \boxed{\text{スセ}} \times 1.01^{10}}{101\left(1.01^{10} - 1\right)}$$

となる。したがって，毎年の初めの入金額が例えば 18000 円であれば，10 年目の終わりの預金が 30 万円以上になることがわかる。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ a_{10}	① $a_{10} + p$	② $a_{10} - p$
③ $1.01\,a_{10}$	④ $1.01\,a_{10} + p$	⑤ $1.01\,a_{10} - p$

(数学Ⅱ・数学B第 4 問は次ページに続く。)

(3)　1年目の入金を始める前における花子さんの預金が10万円ではなく，13万円の場合を考える。すべての自然数 n に対して，この場合の n 年目の初めの預金は a_n 万円よりも $\boxed{\text{ソ}}$ 万円多い。なお，年利は1％であり，毎年の初めの入金額は p 万円のままである。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ 3	① 13	② $3(n-1)$
③ $3n$	④ $13(n-1)$	⑤ $13n$
⑥ 3^n	⑦ $3+1.01(n-1)$	⑧ $3\times1.01^{n-1}$
⑨ 3×1.01^n	ⓐ $13\times1.01^{n-1}$	ⓑ 13×1.01^n