第3問　（選択問題）（配点　20）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 43 ページの正規分布表を用いてもよい。

(1)　ある生産地で生産されるピーマン全体を母集団とし，この母集団におけるピーマン1個の重さ(単位は g)を表す確率変数を X とする。m と σ を正の実数とし，X は正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとする。

(i)　この母集団から1個のピーマンを無作為に抽出したとき，重さが m g 以上である確率 $P(X \geqq m)$ は

$$P(X \geqq m) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq \boxed{0}\right) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

(1点)　(1点)

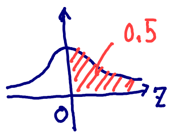
である。

$X \geqq m$

$\Leftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \geqq \boxed{0}$ ア

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ とすると Z は $N(0,1)$ に従うので

$P(Z \geqq 0) = \boxed{\frac{1}{2}}$ イウ



(ii)　母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ の標本平均を $\overline{X}$ とする。$\overline{X}$ の平均(期待値)と標準偏差はそれぞれ

$$E(\overline{X}) = \boxed{4},\qquad \sigma(\overline{X}) = \boxed{2}$$

(2点)　(2点)

となる。

$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\{E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)\}$

$= \frac{1}{n}(\underbrace{m+m+\cdots+m}_{n\text{個}})$

$= \frac{1}{n}mn = \boxed{m}$ ④エ

$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{\frac{1}{n^2}(\sigma^2+\sigma^2+\cdots+\sigma^2)}$

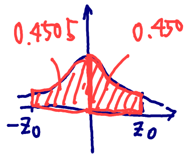
$= \sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2 n} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

$= \boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ②オ

$n = 400$，標本平均が 30.0 g，標本の標準偏差が 3.6 g のとき，m の信頼度 90 % の信頼区間を次の**方針**で求めよう。

方針

Z を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数として，$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.901$ となる z_0 を正規分布表から求める。この z_0 を用いると m の信頼度 90.1 % の信頼区間が求められるが，これを信頼度 90 % の信頼区間とみなして考える。



$P(0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.901 \times \frac{1}{2} = 0.4505$

正規分布表から $z_0 = \boxed{1.65}$ カキク

方針において，$z_0 = \boxed{1}.\boxed{65}$ である。

(2点)

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

一般に，標本の大きさ n が大きいときには，母標準偏差の代わりに，標本の標準偏差を用いてよいことが知られている。$n = 400$ は十分に大きいので，**方針**に基づくと，m の信頼度 90 % の信頼区間は $\boxed{\text{ケ}}$ となる。

$29.7 \leqq m \leqq 30.3$ ④

(2点)

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ σ	① σ^2	② $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ オ	③ $\dfrac{\sigma^2}{n}$
④ m エ	⑤ $2m$	⑥ m^2	⑦ $\sqrt{m}$
⑧ $\dfrac{\sigma}{n}$	⑨ $n\sigma$	ⓐ nm	ⓑ $\dfrac{m}{n}$

$\boxed{\text{ケ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $28.6 \leqq m \leqq 31.4$	① $28.7 \leqq m \leqq 31.3$	② $28.9 \leqq m \leqq 31.1$
③ $29.6 \leqq m \leqq 30.4$	④ $29.7 \leqq m \leqq 30.3$	⑤ $29.9 \leqq m \leqq 30.1$

(数学Ⅱ・数学B第３問は次ページに続く。)

$n = 400$

$\overline{X} = 30$

$\sigma = 3.6$

mの信頼度90%の信頼区間は

$$-1.65 \leqq \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqq 1.65$$

すなわち

$$\overline{X} - 1.65 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.65 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ここで $1.65 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.65 \cdot \frac{3.6}{\sqrt{400}} = \frac{165}{100} \cdot \frac{3.6}{20} = \frac{33}{20} \cdot \frac{0.9}{5} = \frac{29.7}{100} = 0.297$

これより

$$30 - 0.297 \leqq m \leqq 30 + 0.297$$

$$\therefore \ 29.703 \leqq m \leqq 30.297$$

よって 小数第2位を四捨五入して $29.7 \leqq m \leqq 30.3$ $\boxed{4}$ // ケ

(2) (1)の確率変数 X において，$m = 30.0$，$\sigma = 3.6$ とした母集団から無作為にピーマンを1個ずつ抽出し，ピーマン2個を1組にしたものを袋に入れていく。このようにしてピーマン2個を1組にしたものを25袋作る。その際，1袋ずつの重さの分散を小さくするために，次の**ピーマン分類法**を考える。

ピーマン分類法

無作為に抽出したいくつかのピーマンについて，重さが30.0 g以下のときをSサイズ，30.0 gを超えるときはLサイズと分類する。そして，分類されたピーマンからSサイズとLサイズのピーマンを一つずつ選び，ピーマン2個を1組とした袋を作る。

30g以下をS
30gを超えるをL

SとLを一つずつの2個で1袋

(i) ピーマンを無作為に50個抽出したとき，**ピーマン分類法**で25袋作ることができる確率 p_0 を考えよう。無作為に1個抽出したピーマンがSサイズである確率は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ である。ピーマンを無作為に50個抽出したときのSサイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_0 とすると，U_0 は二項分布 $B\left(50,\ \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right)$ に従うので

(1点)

(1)(i)と同様にして
$P(X \leqq 30)$
$= P\left(\dfrac{X-30}{3.6} \leqq 0\right)$
$= \boxed{\dfrac{1}{2}}$ コサ

$$p_0 = {}_{50}\mathrm{C}_{\boxed{25}} \times \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right)^{\boxed{25}} \times \left(1 - \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right)^{50-\boxed{25}}$$

(2点)

$P_0 = \boxed{{}_{50}C_{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}}$ シス
$= 0.1122$
$\fallingdotseq 0.11$

となる。

p_0 を計算すると，$p_0 = 0.1122\cdots$ となることから，ピーマンを無作為に50個抽出したとき，25袋作ることができる確率は0.11程度とわかる。← 11%だとなかなか作れない

(ii) **ピーマン分類法**で25袋作ることができる確率が0.95以上となるようなピーマンの個数を考えよう。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

k を自然数とし，ピーマンを無作為に$(50+k)$個抽出したとき，Sサイズのピーマンの個数を表す確率変数をU_kとすると，U_kは二項分布

$$B\left(50+k,\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right)$$

に従う。

$(50+k)$は十分に大きいので，U_kは近似的に正規分布

$$N\left(\boxed{3},\ \boxed{7}\right)$$

$\frac{50+k}{2}$ (1点)　$\frac{50+k}{4}$ (1点)

に従い，$Y=\dfrac{U_k-\boxed{\frac{50+k}{2}}}{\sqrt{\boxed{\frac{50+k}{4}}}}$ とすると，Yは近似的に標準正規分布$N(0,1)$に従う。

よって，**ピーマン分類法**で，25袋作ることができる確率をp_kとすると

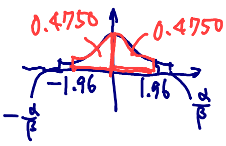
$$p_k=P(25\leqq U_k\leqq 25+k)=P\left(-\frac{\boxed{0}}{\sqrt{50+k}}\leqq Y\leqq\frac{\boxed{k}}{\sqrt{50+k}}\right)$$

(3点)

となる。

$\boxed{k}=\alpha$，$\sqrt{50+k}=\beta$ とおく。

$p_k\geqq 0.95$ になるような $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について，正規分布表から $\dfrac{\alpha}{\beta}\geqq 1.96$ を満たせばよいことがわかる。ここでは



$$\frac{\alpha}{\beta}\geqq 2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす自然数kを考えることとする。①の両辺は正であるから，$\alpha^2\geqq 4\beta^2$を満たす最小のkをk_0とすると，$k_0=\boxed{17}$であることがわかる。ただし，$\boxed{17}$の計算においては，$\sqrt{51}=7.14$を用いてもよい。

(2点)

用いなくても下の(補)で計算できる

したがって，少なくとも$(50+\boxed{17})$個のピーマンを抽出しておけば，**ピーマン分類法**で25袋作ることができる確率は0.95以上となる。

67

67個抽出すると95%以上で25袋作れる

$\boxed{\text{セ}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ k (タ)	① $2k$	② $3k$	③ $\dfrac{50+k}{2}$ (セ)
④ $\dfrac{25+k}{2}$	⑤ $25+k$	⑥ $\dfrac{\sqrt{50+k}}{2}$	⑦ $\dfrac{50+k}{4}$ (ソ)

(数学Ⅱ・数学B第3問は43ページに続く。)

(補) $\sqrt{51}=7.14$ を用いずに
$14^2=196$，$15^2=225$
から $k_0-2=15$ で $k_0=17$

Xが$B(n,p)$に従うとき
$E(X)=np$
$V(X)=np(1-p)$

$E(U_k)=(50+k)\cdot\frac{1}{2}$
$=\boxed{\frac{50+k}{2}}$
③ セ

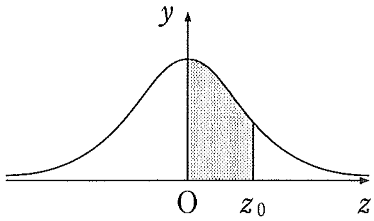
$V(U_k)=(50+k)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
$=\boxed{\frac{50+k}{4}}$
⑦ ソ

SがU_k個
Lが$(50+k-U_k)$個
25袋以上できる条件は
$U_k\geqq 25$
$50+k-U_k\geqq 25$
$\therefore 25\leqq U_k\leqq 25+k$
各辺から$\frac{50+k}{2}=25+\frac{k}{2}$をひいて
$-\frac{k}{2}\leqq U_k-\frac{50+k}{2}\leqq\frac{k}{2}$
各辺を$\sqrt{\frac{50+k}{4}}=\frac{\sqrt{50+k}}{2}$でわって
$-\frac{k}{\sqrt{50+k}}\leqq Y\leqq\frac{k}{\sqrt{50+k}}$
⓪ タ

$k=\alpha$
$\sqrt{50+k}=\beta$
として
$p_k=P\left(-\frac{\alpha}{\beta}\leqq Y\leqq\frac{\alpha}{\beta}\right)\geqq 0.95$
①をみたせばよいことを考えて
$\frac{\alpha}{\beta}\geqq 2$
すなわち
$\alpha\geqq 2\beta$ 2乗
$\alpha^2\geqq 4\beta^2$
$k^2\geqq 4(50+k)$
$k^2-4k-200\geqq 0$
$(k-2)^2\geqq 204$
$|k-2|\geqq\sqrt{204}$
$\therefore k\geqq 2+2\sqrt{51}$
$\doteqdot 2+2\times 7.14$
$=16.28$
$\therefore k_0=\boxed{17}$ 4ツ

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990