

第3問 (選択問題) (配点 20)

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて43ページの正規分布表を用いてもよい。

(1) ある生産地で生産されるピーマン全体を母集団とし、この母集団におけるピーマン1個の重さ(単位はg)を表す確率変数を X とする。 m と σ を正の実数とし、 X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとする。

(i) この母集団から1個のピーマンを無作為に抽出したとき、重さが m g以上である確率 $P(X \geq m)$ は

$$P(X \geq m) = P\left(\frac{X - m}{\sigma} \geq \boxed{\text{ア}}\right) = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(ii) 母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本 X_1, X_2, \dots, X_n の標本平均を \bar{X} とする。 \bar{X} の平均(期待値)と標準偏差はそれぞれ

$$E(\bar{X}) = \boxed{\text{エ}}, \quad \sigma(\bar{X}) = \boxed{\text{オ}}$$

となる。

$n = 400$ 、標本平均が30.0g、標本の標準偏差が3.6gのとき、 m の信頼度90%の信頼区間を次の方針で求めよう。

方針

Z を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数として、 $P(-z_0 \leq Z \leq z_0) = 0.901$ となる z_0 を正規分布表から求める。この z_0 を用いると m の信頼度90.1%の信頼区間が求められるが、これを信頼度90%の信頼区間とみなして考える。

方針において、 $z_0 = \boxed{\text{カ}} . \boxed{\text{キク}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

一般に、標本の大きさ n が大きいときには、母標準偏差の代わりに、標本の標準偏差を用いてよいことが知られている。 $n = 400$ は十分に大きいので、方針に基づくと、 m の信頼度 90 % の信頼区間は ケ となる。

エ， オ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | |
|----------------------|--------------|-----------------------------|------------------------|
| ① σ | ② σ^2 | ③ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | ④ $\frac{\sigma^2}{n}$ |
| ⑤ m | ⑥ $2m$ | ⑦ m^2 | ⑧ \sqrt{m} |
| ⑨ $\frac{\sigma}{n}$ | ⑩ $n\sigma$ | ㉑ nm | ㉒ $\frac{m}{n}$ |

ケ については、最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| ① $28.6 \leq m \leq 31.4$ | ② $28.7 \leq m \leq 31.3$ | ③ $28.9 \leq m \leq 31.1$ |
| ④ $29.6 \leq m \leq 30.4$ | ⑤ $29.7 \leq m \leq 30.3$ | ⑥ $29.9 \leq m \leq 30.1$ |

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

- (2) (1)の確率変数 X において, $m = 30.0$, $\sigma = 3.6$ とした母集団から無作為にピーマンを1個ずつ抽出し, ピーマン2個を1組にしたものを袋に入れていく。このようにしてピーマン2個を1組にしたものを25袋作る。その際, 1袋ずつの重さの分散を小さくするために, 次のピーマン分類法を考える。

ピーマン分類法

無作為に抽出したいくつかのピーマンについて, 重さが 30.0 g 以下のときをSサイズ, 30.0 g を超えるときはLサイズと分類する。そして, 分類されたピーマンからSサイズとLサイズのピーマンを一つずつ選び, ピーマン2個を1組とした袋を作る。

- (i) ピーマンを無作為に50個抽出したとき, ピーマン分類法で25袋作ることができる確率 p_0 を考えよう。無作為に1個抽出したピーマンがSサイズである

確率は $\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ である。ピーマンを無作為に50個抽出したときのSサイズ

のピーマンの個数を表す確率変数を U_0 とすると, U_0 は二項分布

$B\left(50, \frac{\text{コ}}{\text{サ}}\right)$ に従うので

$$p_0 = {}_{50}C_{\text{シス}} \times \left(\frac{\text{コ}}{\text{サ}}\right)^{\text{シス}} \times \left(1 - \frac{\text{コ}}{\text{サ}}\right)^{50 - \text{シス}}$$

となる。

p_0 を計算すると, $p_0 = 0.1122\cdots$ となることから, ピーマンを無作為に50個抽出したとき, 25袋作ることができる確率は0.11程度とわかる。

- (ii) ピーマン分類法で25袋作ることができる確率が0.95以上となるようなピーマンの個数を考えよう。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

k を自然数とし、ピーマンを無作為に $(50 + k)$ 個抽出したとき、Sサイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_k とすると、 U_k は二項分布

$$B\left(50 + k, \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right) \text{に従う。}$$

$(50 + k)$ は十分に大きいので、 U_k は近似的に正規分布 $N(\boxed{\text{セ}}, \boxed{\text{ソ}})$ に従い、 $Y = \frac{U_k - \boxed{\text{セ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}$ とすると、 Y は近似的

に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

よって、ピーマン分類法で、25袋作ることができる確率を p_k とすると

$$p_k = P(25 \leq U_k \leq 25 + k) = P\left(-\frac{\boxed{\text{タ}}}{\sqrt{50 + k}} \leq Y \leq \frac{\boxed{\text{タ}}}{\sqrt{50 + k}}\right)$$

となる。

$$\boxed{\text{タ}} = \alpha, \sqrt{50 + k} = \beta \text{とおく。}$$

$p_k \geq 0.95$ になるような $\frac{\alpha}{\beta}$ について、正規分布表から $\frac{\alpha}{\beta} \geq 1.96$ を満たせばよいことがわかる。ここでは

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq 2 \dots\dots\dots \text{①}$$

を満たす自然数 k を考えることとする。①の両辺は正であるから、 $\alpha^2 \geq 4\beta^2$ を満たす最小の k を k_0 とすると、 $k_0 = \boxed{\text{チツ}}$ であることがわかる。ただし、 $\boxed{\text{チツ}}$ の計算においては、 $\sqrt{51} = 7.14$ を用いてもよい。

したがって、少なくとも $(50 + \boxed{\text{チツ}})$ 個のピーマンを抽出しておけば、ピーマン分類法で25袋作ることができる確率は0.95以上となる。

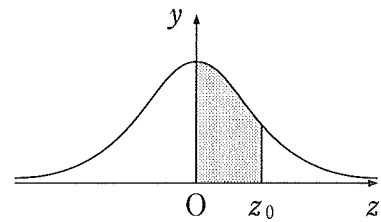
$\boxed{\text{セ}} \sim \boxed{\text{タ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | |
|----------------------|------------|-----------------------------|----------------------|
| ① k | ② $2k$ | ③ $3k$ | ④ $\frac{50 + k}{2}$ |
| ⑤ $\frac{25 + k}{2}$ | ⑥ $25 + k$ | ⑦ $\frac{\sqrt{50 + k}}{2}$ | ⑧ $\frac{50 + k}{4}$ |

(数学Ⅱ・数学B第3問は43ページに続く。)

正 規 分 布 表

次の表は、標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990