第4問 （選択問題）（配点　20）

色のついた長方形を並べて正方形や長方形を作ることを考える。色のついた長方形は，向きを変えずにすき間なく並べることとし，色のついた長方形は十分あるものとする。

(1) 横の長さが462で縦の長さが110である赤い長方形を，図1のように並べて正方形や長方形を作ることを考える。

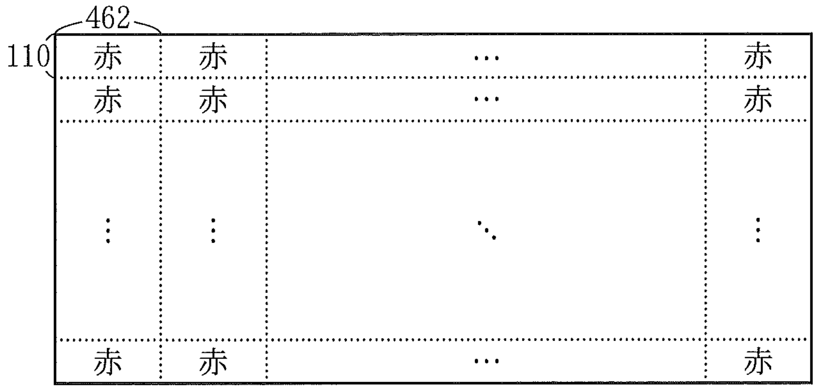


図　1

（数学Ⅰ・数学A第4問は次ページに続く。）

462 と 110 の両方を割り切る素数のうち最大のものは $\boxed{11}$ である。
(2点)

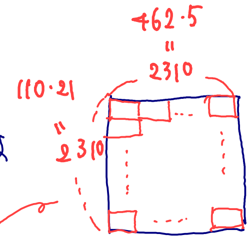
赤い長方形を並べて作ることができる正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，一辺の長さが $\boxed{2310}$ のものである。
(3点)

また，赤い長方形を並べて正方形ではない長方形を作るとき，横の長さと縦の長さの差の絶対値が最小になるのは，462 の約数と 110 の約数を考えると，差の絶対値が $\boxed{22}$ になるときであることがわかる。
(3点)

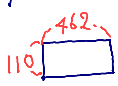
縦の長さが横の長さより $\boxed{22}$ 長い長方形のうち，横の長さが最小であるものは，横の長さが $\boxed{1848}$ のものである。
(3点)

(数学Ⅰ・数学A第4問は次ページに続く。)

$462 = 42 \times 11 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$
$110 = 10 \times 11 = 2 \cdot 5 \cdot 11$



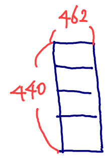
462と110の両辺を割り切る素数は 2, 11で最大のものは $\boxed{11}$ アイ

赤い長方形 

を並べて作る正方形で辺の長さが最小となる一辺の長さは
462と110の最小公倍数であるから $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = \boxed{2310}$ ウエオカ

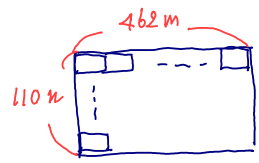
赤い長方形を並べて正方形でない長方形を作るとき，横にm個，縦にn個並べて
長さの差の絶対値は

$$|462m - 110n| = 22|21m - 5n|$$



← 22は462と110の最大公約数

22の倍数で正なので $|21m - 5n| = 1$ のとき最小値 $\boxed{22}$
($m=1,\ n=4$ などがある)



上と同様にして縦の長さが横の長さより22長い長方形について

$$110n - 462m = 22(5n - 21m) = 22$$

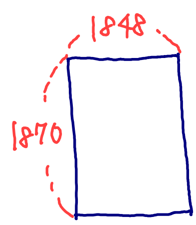
$$\therefore\ 5n - 21m = 1$$

これをみたす自然数の組 (m, n) で m が最小となることを考えると

$$5n = 21m + 1$$

← $21m+1$ は5の倍数

$m = 1, 2, 3$ はみたさず $m = 4$ で $5n = 85$ $\therefore\ n = 17$ でみたすから最小の m は4



よって横の長さは $462 \times 4 = \boxed{1848}$ ケコサシ

補 縦の長さは $110 \times 17 = 1870$

$1870 - 1848 = 22$

(2) 花子さんと太郎さんは，(1)で用いた赤い長方形を1枚以上並べて長方形を作り，その右側に横の長さが363で縦の長さが154である青い長方形を1枚以上並べて，図2のような正方形や長方形を作ることを考えている。

長さについて
縦は
110, 363の公倍数
横は
赤と青の長方形の個数分の和

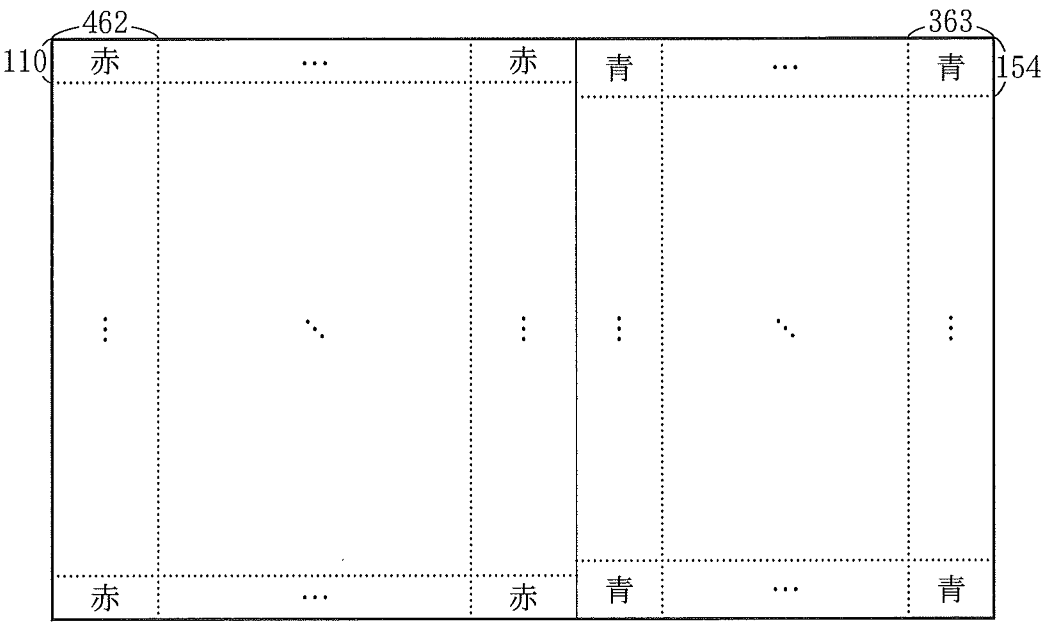


図 2

このとき，赤い長方形を並べてできる長方形の縦の長さと，青い長方形を並べてできる長方形の縦の長さは等しい。よって，図2のような長方形のうち，縦の長さが最小のものは，縦の長さが $\boxed{770}$ のものであり，図2のような長方形は縦の長さが $\boxed{770}$ の倍数である。

(2点)

(数学Ⅰ・数学A第4問は次ページに続く。)

$110 = 10 \cdot 11 = 2 \cdot 5 \cdot 11$

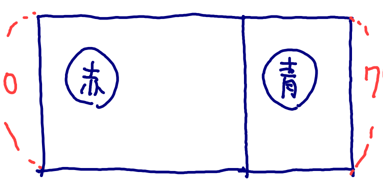
$154 = 14 \cdot 11 = 2 \cdot 7 \cdot 11$

110と154の最小公倍数から

$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = \boxed{770}$

スセソ

$110 \times 7 = 770$



$770 = 154 \times 5$

二人は，次のように話している。

花子：赤い長方形と青い長方形を図２のように並べて正方形を作ってみようよ。

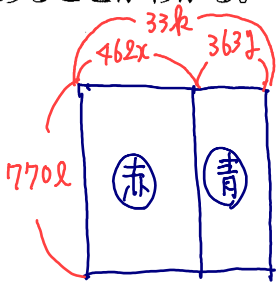
太郎：赤い長方形の横の長さが 462 で青い長方形の横の長さが 363 だから，図２のような正方形の横の長さは 462 と 363 を組み合わせて作ることができる長さでないといけないね。

花子：正方形だから，横の長さは $\boxed{770}$ の倍数でもないといけないね。

462 と 363 の最大公約数は $\boxed{33}$ (2点) であり，$\boxed{33}$ の倍数のうちで $\boxed{770}$ の倍数でもある最小の正の整数は $\boxed{2310}$ (2点) である。

これらのことと，使う長方形の枚数が赤い長方形も青い長方形も１枚以上であることから，図２のような正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，一辺の長さが $\boxed{6930}$ (3点) のものであることがわかる。

$462 = 42 \times 11 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$
$363 = 3 \times 121 = 3 \cdot 11^2$
462 と 363 の最大公約数は 33



横に赤い長方形を x 個 $(x \geqq 1)$
青い長方形を y 個 $(y \geqq 1)$
並べるとに，横の長さは
$462x + 363y = 33(14x + 11y)$　k
と表せて 33の倍数である
正方形になるには，これが770の倍数になる必要があるから
$14x+11y$ は 70 の倍数で，z を正の整数として
$14x + 11y = 70z$　$k = 70z$ とした
と表せて
$11y = 14(5z - x)$
11, 14 は互いに素なので y が 14 の倍数
$5z - x$ が 11 の倍数
辺の長さが最小なので $y = 14$ として
$5z - x = 11$
これをみたす正の整数の組 (x, z) で z が最小なのは
$z = 3,\ x = 4$
よって，正方形で，辺の長さが最小となる一辺の長さは
$462 \cdot 4 + 363 \cdot 14 = 33 \cdot 70 \cdot 3 = \boxed{6930}$　ニヌネノ
補 横に赤い長方形 4 個，青い長方形 14 個

33の倍数のうちで770の倍数でもあるのは
k, l を整数として
$33k = 770l$　$2 \times \frac{1}{11}$
$\therefore\ 3k = 70l$
3, 70 は互いに素なので k は 70 の倍数
l は 3 の倍数
求める最小の整数は
$(33 \cdot 70 = 770 \cdot 3) = \boxed{2310}$　ツテトナ