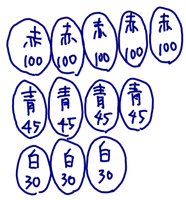
追加問題　二学期第 11 講 解答例

> **1.**　箱の中に，赤玉が 5 個，青玉が 4 個，白玉が 3 個入っている．それぞれの玉の大きさは同じで，1 個あたりの重さは，赤玉が 100g，青玉が 45g，白玉が 30g である．このとき以下の問いに答えよ．ただし，取り出した玉は重さを量ったあとで，箱の中にもどすものとする．
>
> (1)　無作為に箱から玉を 1 個取り出して空の袋に入れ，重さを量ったとする．このとき袋の中身の重さが 40g 以上であるという条件のもとで，袋の中身が赤玉である確率を求めよ．
>
> (2)　無作為に箱から玉を 2 個取り出して空の袋に入れ，重さを量ったとする．このとき袋の中身の重さが 100g 以上であるという条件のもとで，袋の中身が 2 個とも赤玉である確率を求めよ．
>
> (3)　無作為に箱から玉を 3 個取り出して空の袋に入れ，重さを量ったとする．このとき袋の中身の重さが 150g 以上であるという条件のもとで，袋の中身が 3 個とも赤玉である確率を求めよ．

〔解答例〕

箱の中に 100g の赤玉が 5 個，45g の青玉が 4 個，30g の白玉が 3 個の合計 12 個の玉が入っている．玉をすべて区別して考える．



(1)　箱から玉を 1 個取り出して袋の中身の重さが 40g 以上となる取り出し方は，

赤玉または青玉を取り出すときより

$5 + 4 = 9$（通り）……①

① のうち，袋の中身が赤玉となる取り出し方は 5（通り）……②

よって，求める確率は $\dfrac{②}{①}$ として $\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

(2)　箱から玉を 2 個取り出して袋の中身の重さが 100g 以上となる取り出し方は，

少なくとも一つが赤玉となるときより　←取り出し方全体から赤玉がない場合をひく

${}_{12}C_2 - {}_7C_2 = 66 - 21 = 45$（通り）……③

③ のうち，袋の中身が 2 個とも赤玉となる取り出し方は ${}_5C_2 = 10$（通り）……④

よって，求める確率は $\dfrac{④}{③}$ として $\dfrac{10}{45} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

(3)　箱から玉を 3 個取り出して袋の中身の重さが 150g 以上となる取り出し方は，

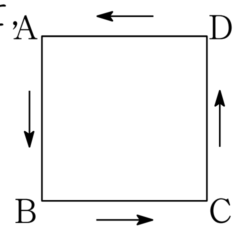
少なくとも一つが赤玉となるときより

${}_{12}C_3 - {}_7C_3 = 220 - 35 = 185$（通り）……⑤

⑤ のうち，袋の中身が 3 個とも赤玉となる取り出し方は ${}_5C_3 = 10$（通り）……⑥

よって，求める確率は $\dfrac{⑥}{⑤}$ として $\dfrac{10}{185} = \boldsymbol{\dfrac{2}{37}}$

2.　正方形 ABCD の頂点を移動する動点 P がある．さいころを投げて，4 以外の目が出たら P は右図の矢印の向きに出た目の数だけ進み，4 の目が出たら P は矢印と逆の向きに 1 つだけ進む．



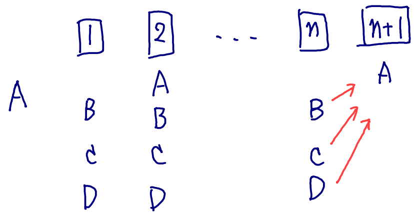
　はじめに P が頂点 A にあったとして，さいころを n 回投げたのち，P が頂点 A，B，C，D にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする．

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ．また，a_n を n の式で表せ．

〔解答例〕

$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ ……①



(1)　1 回の移動を → で表すことにする．

P の移動	出る目	確率
A → B	1, 5	$\frac{1}{3}$
A → C	2, 6	$\frac{1}{3}$
A → D	3, 4	$\frac{1}{3}$

つまり点 P は 1 回の移動で異なる 3 点に等確率 $\frac{1}{3}$ で移動する．

また，対称性から　$b_n = c_n = d_n$ ……②

よって　$\boldsymbol{a_1 = 0,\ b_1 = \frac{1}{3},\ c_1 = \frac{1}{3},\ d_1 = \frac{1}{3}}$

$a_2 = b_1 \times \frac{1}{3} + c_1 \times \frac{1}{3} + d_1 \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

①，② から　$\boldsymbol{b_2 = c_2 = d_2} = \frac{1}{3}(1 - a_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$

(2)　$(n+1)$ 回投げたのち点 P が頂点 A にあるのは，n 回投げた後に点 B，C，D にいて確率 $\frac{1}{3}$ で点 A に進むときより

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n)$$
$$= \frac{1}{3}(1 - a_n)\ (\because ①)$$

$a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}$

$-)\ \alpha = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}$ ⇐ $\alpha = \frac{1}{4}$

$a_{n+1} - \alpha = -\frac{1}{3}(a_n - \alpha)$

よって　$\boldsymbol{a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}}$

変形して　$a_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(a_n - \frac{1}{4}\right)$

$\left\{a_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$，等比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$