追加問題　二学期第 10 講 解答例

1.　4 個のさいころを同時に投げるとき，次の問いに答えよ．

(1)　1 種類の目のみが出る（4 個とも同じ目が出る）確率を求めよ．

(2)　4 種類の目が出る（4 個とも異なる目が出る）確率を求めよ．

(3)　ちょうど 2 種類の目が出る確率を求めよ．

(4)　ちょうど 3 種類の目が出る確率を求めよ．

〔解答例〕

出る目がちょうど k 種類となる確率を p_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とすると

$$p_1+p_2+p_3+p_4=1 \quad \cdots\cdots①$$

(1)　$k=1$ となるのは 4 個とも同じ目が出るときであるから

$$p_1=\frac{6}{6^4}=\mathbf{\frac{1}{216}}$$

← 1, 1, 1, 1　2, 2, 2, 2　⋮　6, 6, 6, 6　6(通り)

(2)　$k=4$ となるのは 4 個とも異なる目が出るときより

$$p_4=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6^4}=\frac{60}{216}=\mathbf{\frac{5}{18}}$$

$6\times5\times4\times3$ 通り

(3)　$k=2$ となるのは 2 種類の目の決め方が ${}_6\mathrm{C}_2=15$（通り）

例えばその 2 種類を 1，2 とすると 4 個のさいころの目はすべて 1 または 2 の目の 2 通りであり，すべて 1 の目またはすべて 2 の目のときを除いて　$2^4-2=14$（通り）

よって　$p_2=\dfrac{15\cdot14}{6^4}=\mathbf{\dfrac{35}{216}}$

1か2　$2\times2\times2\times2=2^4$ 通り　1 1 1 1　2 2 2 2 のぞく

(4)　① より　$p_3=1-\underbrace{(p_1+p_2+p_4)}_{\text{余事象の確率}}=1-\left(\dfrac{1}{216}+\dfrac{35}{216}+\dfrac{60}{216}\right)=\dfrac{120}{216}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

〔別解例〕

(3)　$k=2$ となるのは 2 種類の目の決め方が ${}_6\mathrm{C}_2=15$（通り）

例えば 2 種類を 1，2 とすると同じ記号に同じ数字が入るとして

○○△△　または　○△△△　または　○○○△

これより　${}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_3=6+4+4=14$（通り）

(4)　$k=3$ なるのは 3 種類の目の決め方が ${}_6\mathrm{C}_3=20$（通り）

例えばその 3 種類を 1，2，3 とすると 4 個のさいころの目はすべて 1 または 2 または 3 の目の 3 通りであり，1 種類または 2 種類の場合を除いて

$$3^4-\{3+{}_3\mathrm{C}_2(2^4-2)\}=81-(3+42)=36\text{（通り）}$$

よって　$p_3=\dfrac{20\cdot36}{6^4}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

(4)　例えば 3 種類を 1，2，3 とすると同じ記号に同じ数字が入るとして

○○△□　または　○△△□　または　○△□□

これより　$\dfrac{4!}{2!}\times3=36$（通り）

2.　1 から 9 までの数字を 1 つずつ書いた 9 個の玉があり，これらの 9 個の玉が袋に入っているとき，次の問いに答えよ．

(1)　袋から玉を 2 個同時に取り出すとき，取り出された玉に書かれている数の最大値が 7 である確率は $\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$ である．

(2)　袋から玉を 3 個同時に取り出すとき，取り出された玉に書かれている数の最大値が 7 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$ である．

(3)　袋から玉を 3 個同時に取り出すとき，取り出された玉に書かれている数の最大値が 5 以上 7 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$ である．

(4)　$1 \leqq k \leqq 9$ であるような自然数 k に対して，袋から玉を k 個同時に取り出すとき，取り出された玉に書かれている数の最大値が 7 である確率を p_k とする．p_k が最大となるのは $k = \boxed{\quad}$ のときである．

〔解答例〕

(1)　袋から玉を 2 個同時に取り出すとき，取り出された玉に書かれている数の最大値が 7 である確率は，7 と 1〜6 のうちの 1 つを取り出すときより

$$\frac{{}_6C_1}{{}_9C_2} = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

□ □ 7
7より小さい

(2)　袋から玉を 3 個同時に取り出すとき，取り出された玉に書かれている数の最大値を X として，$X \leqq 7$ となるのは 1〜7 のうちの 3 つを取り出す場合より

$$P(X \leqq 7) = \frac{{}_7C_3}{{}_9C_3} = \frac{35}{84} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

← $P(X \leqq 7)$ は $X \leqq 7$ となる確率を表す
一般に $P(X \leqq k) = \dfrac{{}_kC_3}{{}_9C_3}$

(3)　(2) と同様に考えて $P(X \leqq 4) = \dfrac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = \dfrac{4}{84}$

$$P(5 \leqq X \leqq 7) = P(X \leqq 7) - P(X \leqq 4) = \frac{35}{84} - \frac{4}{84} = \boxed{\frac{31}{84}}$$

← 3つとも7以下から
3つとも4以下をひく

(4)　$k = 8,\ 9$ のとき　最大値は 8 以上になるので　$p_k = 0$

$1 \leqq k \leqq 7$ のとき

最大値が 7 となるのは，7 と 1 〜 6 のうちの $k-1$ 個を取り出すときより

$$p_k = \frac{{}_6C_{k-1}}{{}_9C_k} = \frac{6!}{(k-1)!(7-k)!} \cdot \frac{k!(9-k)!}{9!}$$

← ${}_NC_r = \dfrac{N!}{r!(N-r)!}$

$$= \frac{6!}{(k-1)!(7-k)!} \cdot \frac{k \cdot (k-1)!(9-k)(8-k)(7-k)!}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{k(8-k)(9-k)}{9 \cdot 8 \cdot 7}$$

ここで　$p_k < p_{k+1}$　とすると　$k(8-k)(9-k) < (k+1)(7-k)(8-k)$

両辺 $(8-k)(>0)$ で割って　$k(9-k) < (k+1)(7-k)$　すなわち　$3k < 7$　　$\therefore k = 1,\ 2$

このことから $\begin{cases} k = 1,\ 2 \text{ のとき} & p_k < p_{k+1} \\ k = 3,\ 4,\ \cdots,\ 7 \text{ のとき} & p_k > p_{k+1} \end{cases}$

← p_k と p_{k+1} の大小を考える

つまり　$p_1 < p_2 < p_3 > p_4 > p_5 > \cdots > p_7 > p_8 = p_9 = 0$

よって　$k = \boxed{3}$ のとき p_k は最大となる．