追加問題　二学期第 9 講 解答例

1.　次の問に答えよ.

(1)　$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ.

(2)　${}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$ の値を求めよ.

〔解答例〕

← 二項定理

(1)　$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6=\left\{x^2+\left(-\dfrac{2}{x}\right)\right\}^6$ の展開式の一般項は $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ として

$${}_6\mathrm{C}_k(x^2)^{6-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k={}_6\mathrm{C}_k x^{12-2k}(-2)^k\frac{1}{x^k}={}_6\mathrm{C}_k(-2)^k x^{12-3k}$$ ← $x^0=1$ とする

定数項は $12-3k=0$ のときより $k=4$

よって，定数項は ${}_6\mathrm{C}_4(-2)^4=15\cdot16=\mathbf{240}$

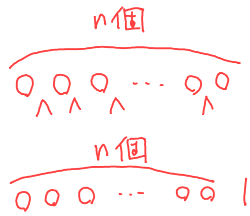
(2)　${}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=(1+1)^{10}=2^{10}=\mathbf{1024}$ ← $(a+b)^{10}=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_k a^{10-k}b^k$ で $a=1,\ b=1$ とした

2.　n を 3 以上の整数とする．次の問いに答えよ.

(1)　$x+y+z=n\ (x\geqq1,\ y\geqq1,\ z\geqq1)$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ.

(2)　$x+y+z=n\ (x\geqq0,\ y\geqq0,\ z\geqq0)$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ.

〔解答例〕



(1)　n 個の品物の間に仕切りを 2 個入れることを考えて

$${}_{n-1}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\ (通り)$$

(2)　n 個の品物と 2 個の仕切りを並べることを考えて

$$\frac{(n+2)!}{n!2!}=\boldsymbol{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}\ (通り)$$

3.　次の問いに答えよ.

(1)　区別のつかない 6 個の球を 3 つの組に分ける方法は何通りか.

(2)　区別のつかない 6 個の球を 1 人が必ず 1 個以上もらえるとして，3 人に分ける方法は何通りか.

(3)　区別のつかない 6 個の球を 1 個ももらえない人がいてもよいとして，3 人に分ける方法は何通りか.

(4)　6 人を 2 人，2 人，2 人の松組，竹組，梅組に分ける方法は何通りか.

(5)　6 人を 2 人，2 人，2 人の 3 つの組に分ける方法は何通りか.

(6)　6 人を 1 人もいない組があってもよいとして，3 つの組 A，B，C に分ける方法は何通りか.

(7)　6 人を 1 人もいない組がないように，3 つの組 A，B，C に分ける方法は何通りか.

〔解答例〕

(1)　3 つの組の球の個数が (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2) の場合で **3**（通り） ← 個数に着目する

(2)　○∧○∧○∧○∧○∧○

6 つの ○ の間の 5 つの ∧ のうちの 2 つに仕切りを入れることを考えて

$${}_5C_2 = \mathbf{10}\text{（通り）}$$

(3)　$\underbrace{○○○○○○}_{6個}\ \underbrace{|\ |}_{2個}$

6 つの ○ と 2 つの仕切り ｜ を並べることを考えて

$${}_8C_2 = \frac{8!}{6!2!} = \mathbf{28}\text{（通り）}$$

(4)　6 人から松組の 2 人を決めて，残った 4 人から竹組の 2 人を決めて，さらに残った 2 人を梅組に決めることを考えて

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = \mathbf{90}\text{（通り）}$$

(5)　6 人を組に区別があるとして組分けし，組に区別がないと 3! 通りが重複していることから

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = \mathbf{15}\text{（通り）}$$

(6)　1 人につき 3 通りに組み分けされるので $3^6 = \mathbf{729}$（通り）……①

(7)　① のうち 1 人もいない組があるときの場合の数を考える.

あ 1 人もいない組が 2 組の場合

1 人もいない 2 つの組の決め方が ${}_3C_2 = 3$（通り）

例えば，1 人もいない 2 つの組が B，C のとき，6 人とも A の組に分けられる.

他の場合も同様である．すなわち　$3 \times 1 = 3$（通り）……②

い 1 人もいない組が 1 組だけの場合

1 人もいない 1 組の決め方が ${}_3C_1 = 3$（通り）

例えば，1 人もいない 1 組が C だけのとき，6 人とも A または B の組に分けられる.

それは 1 人につき 2 通りに組分けされるが，6 人とも A または B に組分けされるときは 1 人もいない組が 2 組になってしまうので除いて　$2^6 - 2 = 62$（通り）

他の場合も同様である．すなわち　$3 \times 62 = 186$（通り）……③

よって，① − (② + ③) として　$729 - (3 + 186) = \mathbf{540}$（通り）