座標空間において，連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ |x| \leqq \sin z \\ |y| \leqq \sin z \\ 0 \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

で定められる立体を K とする．立体 K の体積 W を求めよ．

〔 解答例 〕

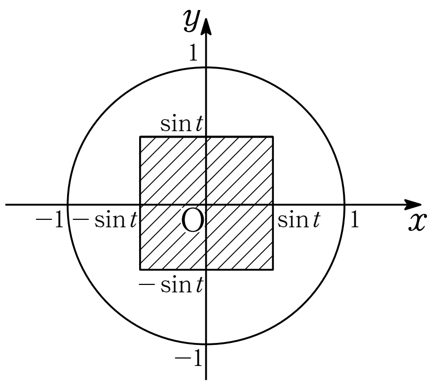
立体 K の平面 $z=t$ による断面積を $S(t)$ とする．

断面の満たす不等式は

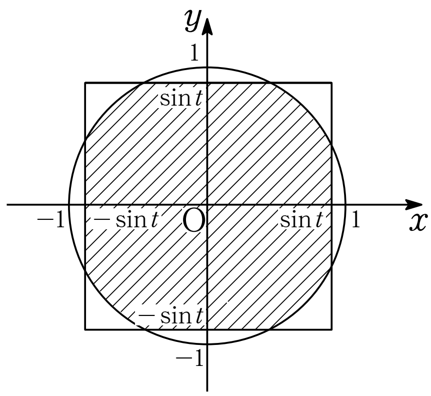
$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ |x| \leqq \sin t \\ |y| \leqq \sin t \\ 0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

断面を xy 平面に正射影すると x 軸，y 軸，原点に関して対称になる．

あ



い

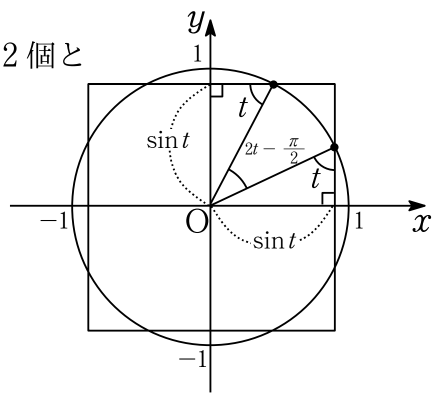


あ $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき

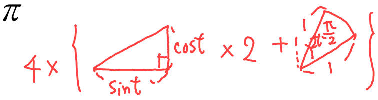
$$S(t)=4\sin^2 t=4\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}=2-2\cos 2t$$

い $\dfrac{\pi}{4} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において，2 辺の長さが $\sin t$，$\cos t$ の直角三角形 2 個と中心角 $2t-\dfrac{\pi}{2}$，半径 1 の扇形の面積より



$$\begin{aligned} S(t)&=4\left\{\frac{1}{2}\sin t\cos t\times 2+\frac{1}{2}\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &=4\sin t\cos t+4t-\pi \end{aligned}$$



あ，い より

$$\begin{aligned} W&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\,dt \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2-2\cos 2t)\,dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\sin t\cos t+4t-\pi)\,dt \\ &=\Big[\,2t-\sin 2t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[\,2\sin^2 t+2t^2-\pi t\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &=\frac{\pi}{2}-1+2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{16}\right)-\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ &=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{8}} \end{aligned}$$