関数 $f(x)$ はすべての実数 x で定義され，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たしているとする．

(a)　すべての実数 x，y 対して，$f(x+y)=f(x)f(y)$ が成り立つ．

(b)　M は正の定数とし，$|x|<1$ のとき，不等式

$$|f(x)-1-x| \leqq M|x|\sqrt{|x|}$$

が成り立つ．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(0)$ を求めよ．

(2)　$f'(0)$ を求めよ．

(3)　すべての実数 x に対して $f'(x)=f(x)$ となることを示せ．

(4)　$\dfrac{d}{dx}\{f(x)e^{-x}\}=0$ となることを示せ．

(5)　関数 $f(x)$ を求めよ．

〔 解答例 〕

(1)　(b) で $x=0$ とすると $\left|f(0)-1\right| \leqq 0$　← 念のため $|f(0)-1| \geqq 0$

よって $\left|f(0)-1\right|=0$ であるから $f(0)=\mathbf{1}$ ……①

(2)　(b) で $x=h$ $(|h|<1)$ とおくと

$$\left|f(h)-1-h\right| \leqq M|h|\sqrt{|h|}$$

$h \fallingdotseq 0$ のもとで両辺を $|h|$ で割ると

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}-1\right| \leqq M\sqrt{|h|}$$

← $|h|<1$ をみたす任意の h に対して成り立つので，0 に近い h の値に対しても成り立つ

$h \to 0$ とすると

$$\left|f'(0)-1\right| \leqq 0$$

よって $\left|f'(0)-1\right|=0$ であるから $f'(0)=\mathbf{1}$ ……②

(3)
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} \quad (\because \text{(a) で } y=h)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\{f(h)-1\}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}\\
&= f(x)f'(0)\\
&= f(x) \quad (\because ②)
\end{aligned}
$$

よって，すべての実数 x に対して $f'(x)=f(x)$ ……Ⓐ

(4)
$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{f(x)e^{-x}\} &= f'(x)e^{-x}+f(x)(-e^{-x})\\
&= \{f'(x)-f(x)\}e^{-x}\\
&= \mathbf{0} \quad (\because Ⓐ)
\end{aligned}
$$

← 積の微分

よって $\dfrac{d}{dx}\{f(x)e^{-x}\}=0$ ……Ⓑ　← x で微分して 0 なので $f(x)e^{-x}$ は定数

(5)　Ⓑ より C を定数として $f(x)e^{-x}=C$ すなわち $f(x)=Ce^{x}$

$x=0$ とすると $f(0)=Ce^{0}$ であるから ① より $C=1$

よって $\boldsymbol{f(x)=e^{x}}$

補 $f(x)=e^x$ について $f(x+y)=e^{x+y}=e^x\cdot e^y=f(x)f(y)$