

関数 $f(x)$ はすべての実数 x で定義され、次の 2 つの条件 (a), (b) を満たしているとする.

(a) すべての実数 x, y 対して, $f(x+y) = f(x)f(y)$ が成り立つ.

(b) M は正の定数とし, $|x| < 1$ のとき, 不等式

$$|f(x) - 1 - x| \leq M|x|\sqrt{|x|}$$

が成り立つ. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f(0)$ を求めよ.

(2) $f'(0)$ を求めよ.

(3) すべての実数 x に対して $f'(x) = f(x)$ となることを示せ.

(4) $\frac{d}{dx}\{f(x)e^{-x}\} = 0$ となることを示せ.

(5) 関数 $f(x)$ を求めよ.