追加問題　二学期第 7 講 解答例

1.　漸化式 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n\ (n\geqq 1)$，$a_1=3$，$a_2=5$ により定義される数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式は

$$a_{n+2}-qa_{n+1}=p(a_{n+1}-qa_n)$$

と変形できる．p，q の値を求めよ．

(2)　(1) を用いて，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を求めよ．

〔 解答例 〕

(1)　$a_{n+2}-qa_{n+1}=p(a_{n+1}-qa_n)$ より　$a_{n+2}=(p+q)a_{n+1}-pqa_n$

$x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=\underbrace{1,2}_{p,q}$

これより $\begin{cases} p+q=3 \\ pq=2 \end{cases}$

よって　$\boldsymbol{p=1,\ q=2}$　または　$\boldsymbol{p=2,\ q=1}$

(2)　(1) より

$$\begin{cases} a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n \\ a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n) \end{cases}$$

公比が1の等比数列と考えてもよい

このことから

数列 $\{a_{n+2}-2a_{n+1}\}$ は初項が $a_2-2a_1=5-2\cdot3=-1$ の定数数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=-1 \quad \cdots\cdots①$$

数列 $\{a_{n+2}-a_{n+1}\}$ は初項が $a_2-a_1=5-3=2$，公比が 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n \quad \cdots\cdots②$$

② − ① として　$\boldsymbol{a_n=2^n+1}$

2. 数列 $\{a_n\}$ が

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = -a_n + 2n - 7 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

〔解答例〕

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

とおくと

$$S_n = -a_n + 2n - 7$$

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$$
$$-)\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$$

(1) $a_1 = S_1 = -a_1 + 2 - 7$

よって $\boldsymbol{a_1 = -\frac{5}{2}}$

(2) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$$= -a_{n+1} + 2(n+1) - 7 - (-a_n + 2n - 7)$$
$$= -a_{n+1} + a_n + 2$$

よって $\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$$
$$-)\ \alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1 \quad \Leftrightarrow \alpha = 2$$
$$a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$$

(3) 変形して $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項が $a_1 - 2 = -\frac{9}{2}$，公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - 2 = -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって $\boldsymbol{a_n = 2 - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

3.　n を自然数とするとき，$2^{3n-2}+3^n$ は 5 の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ．

〔解答例〕

$a_n=2^{3n-2}+3^n$　とおく．

すべての n $(n=1,2,3,\cdots)$ に対して

a_n は 5 の倍数である　……Ⓐ

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

（Ⅰ）　$a_1=2+3=5$　より　$n=1$ のとき Ⓐ は成り立つ．

（Ⅱ）　$n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき Ⓐ が成り立つと仮定すると

$a_k=2^{3k-2}+3^k$

は 5 の倍数であるから，整数 m を用いて

$2^{3k-2}+3^k=5m$　……①

と表せる．

このとき

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=2^{3(k+1)-2}+3^{k+1}\\&=2^3\cdot2^{3k-2}+3^{k+1}\\&=8(5m-3^k)+3\cdot3^k\quad(\because ①)\\&=40m-5\cdot3^k\\&=5(8m-3^k)\end{aligned}$$

$2^{3k-2}=5m-3^k$

$8m-3^k$ は整数であるから　a_{k+1} は 5 の倍数である．

すなわち，$n=k+1$ のときも Ⓐ は成り立つ．

よって，（Ⅰ），（Ⅱ）より証明された．