追加問題　二学期第６講　解答例

1.　次の漸化式をみたす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2$　$(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2)　$a_1=8$，$a_{n+1}=3a_n+2^n$　$(n=1, 2, 3, \cdots)$

〔解答例〕

$a_{n+1}=3a_n-2$

$-)\ \underline{\alpha=3\alpha-2} \Leftrightarrow \alpha=1$

$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$

(1)　変形して　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

数列 $\{a_n-1\}$ は初項が $a_1-1=3-1=2$，公比が 3 の等比数列であるから

$$a_n-1=2\cdot3^{n-1}$$

よって　$a_n=\mathbf{2\cdot3^{n-1}+1}$

(2)　両辺を 2^{n+1} でわって

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと　$b_1=\dfrac{a_1}{2}=4$

$$b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}$$

変形して　$b_{n+1}+1=\dfrac{3}{2}(b_n+1)$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項が $b_1+1=4+1=5$，公比が $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n+1=5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\qquad\therefore b_n=5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$$

よって　$a_n=2^n\cdot b_n=\mathbf{10\cdot3^{n-1}-2^n}$

2.　初項 1，公差 4 の等差数列を下のように第 1 群に 1 個，第 2 群に 2 個，第 3 群に 3 個，…，第 n 群に n 個，… となるように群に分けていく．このとき，次の問いに答えよ．

$$1\,|\,5,\ 9\,|\,13,\ 17,\ 21\,|\,25,\ 29,\ 33,\ 37\,|\,41,\ 45,\ 49,\ 53,\ 57\,|\,61,\ \cdots$$

(1)　第 n 群の最初の項を n を用いて表せ．

(2)　第 n 群に含まれる項の総和を求めよ．

(3)　2013 は第何群の何番目にあるか．

〔 解答例 〕

(1)　初項 1，公差 4 の等差数列の第 m 項を a_m $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと

$$a_m = 4m-3$$

第 n 群の最後は $m = 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

第 n 群の最初の項は第 $n-1$ 群の次の項より $m = \dfrac{(n-1)n}{2}+1 = \dfrac{n^2-n+2}{2}$

よって $a_{\frac{n^2-n+2}{2}} = 4\cdot\dfrac{n^2-n+2}{2}-3 = \boldsymbol{2n^2-2n+1}$ ← $a_m=4m-3$

$1+2+\cdots+n$
$a_{\square}$
$1\,|\,\underbrace{5,9}_{2つ}\,|\,\underbrace{13,17,21}_{3つ}\,|\ \cdots\ |\ \underbrace{\qquad}_{nつ}\ |$
$a_{\square}\quad a_{\square+1}\quad a_{\frac{n(n+1)}{2}}$

(2)　第 n 群の最後の項は $a_{\frac{n(n+1)}{2}} = 4\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-3 = 2n^2+2n-3$

第 n 群に含まれる項の総和を S_n とすると

$$S_n = \underbrace{(2n^2-2n+1)+\cdots\cdots+(2n^2+2n-3)}_{n\text{ 個}}$$

等差数列の和
$\dfrac{項数}{2}$(初項＋末項)

$$= \frac{n}{2}\{(2n^2-2n+1)+(2n^2+2n-3)\}$$
$$= \frac{n}{2}(4n^2-2)$$
$$= \boldsymbol{n(2n^2-1)}$$

(3)　$a_m = 2013$ とすると $4m-3 = 2013$　$\therefore m = 504$ ← $a_{504}=2013$ とわかる

a_{504} が第 n 群の k 番目にあるとすると

$$\begin{cases} \dfrac{(n-1)n}{2} < 504 \leqq \dfrac{n(n+1)}{2} \\ \dfrac{(n-1)n}{2}+k = 504 \end{cases}$$

① ② … ⓚ
$a_{\frac{(n-1)n}{2}}$　a_{504}　$a_{\frac{n(n+1)}{2}}$
2013
k個

ここで $\dfrac{31\cdot32}{2} = 496$，$\dfrac{32\cdot33}{2} = 528$　$\therefore n = 32,\ k = 8$

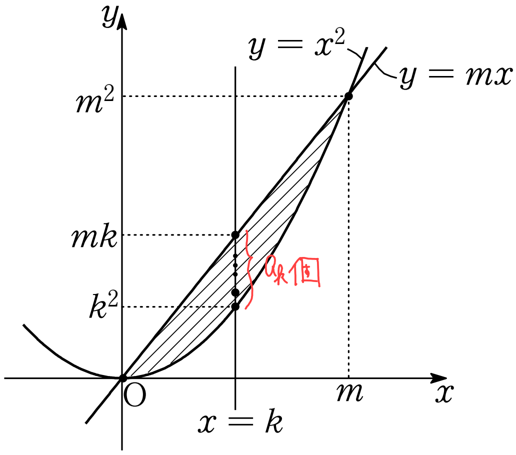
よって，2013 は **第 32 群の 8 番目** にある．

3.　1 以上の整数 m に対して，直線 $y=mx$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域を D_m とする．ただし，D_m は境界を含む．また，領域 D_m に含まれる格子点の個数を d_m とおく．ここで，格子点とは x 座標と y 座標が共に整数になる点のことである．

(1)　$0 \leqq k \leqq m$ である整数 k に対して，直線 $x=k$ 上の格子点で領域 D_m に含まれるものの個数を m と k の式で表せ．

(2)　d_m を m の式で表せ．

〔解答例〕



$m=1, 2, 3, \cdots$

$$D_m : \begin{cases} 0 \leqq x \leqq m \\ x^2 \leqq y \leqq mx \end{cases}$$

D_m に含まれる格子点の個数が d_m である．

(1)　$x=k$ （$k=0, 1, 2, \cdots, m$）上にある ← 串 $x=k$ にささる団子の個数を求める

D_m の格子点の個数を a_k とすると

$$k^2 \leqq y \leqq mk$$

を満たす整数 y の個数に等しく

$$a_k = \boldsymbol{mk-k^2+1} \text{（個）}$$

(2)　(2) を $k=0, 1, 2, \cdots, m$ としてたしあわせると

$d_m = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ ← $(m+1)$本の串にささった団子の個数を合計する

$$\begin{aligned} d_m &= \sum_{k=0}^{m} a_k \\ &= \sum_{k=0}^{m} (mk-k^2+1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m} (mk-k^2+1) \\ &= 1 + m \cdot \frac{m(m+1)}{2} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + m \\ &= \frac{m+1}{6}\{6+3m^2-m(2m+1)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{(m+1)(m^2-m+6)}{6}} \end{aligned}$$

$\frac{m+1}{6}$ でくくった