追加問題　二学期第 5 講 解答例

1.　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ を求めよ.

〔解答例〕

階差の形

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$\left(\boxed{\frac{1}{1\cdot 2}} - \cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}} - \cancel{\frac{1}{3\cdot 4}}\right) + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} - \boxed{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

2.　第 3 項が 8，第 10 項が 29 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とするとき，

(1)　a と d の値を求めよ.

(2)　和 $2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_n}$ を n の式で表せ.

(3)　200 以下の a_n のうち偶数であるものの和を求めよ.

〔解答例〕

(1)　$a_n = a + (n-1)d$

と表せる.

$a_3 = 8$，$a_{10} = 29$ より $\begin{cases} a + 2d = 8 \\ a + 9d = 29 \end{cases}$

よって　$\boldsymbol{a = 2,\ d = 3}$

これより　$a_n = 3n - 1$

初項2^2，公比2^3，項数n の等比数列の和

(2)　$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_n} = 2^2 + 2^5 + \cdots + 2^{3n-1} = 2^2 \cdot \dfrac{(2^3)^n - 1}{2^3 - 1} = \boldsymbol{\dfrac{4}{7}(8^n - 1)}$

(3)　$a_n = 3n - 1 \leqq 200$　とすると　$n \leqq 67$

$a_1 = 2$，$a_2 = 5$，$a_3 = 8$，$a_4 = 11$，$\cdots$，$a_{67} = 200$　← 偶奇をくり返す

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \end{array}\qquad +6 \quad +6$$

ここで　$a_{n+2} = a_n + 6$　より　a_n が偶数ならば a_{n+2} も偶数である.

これより，偶数であるものは　a_1，a_3，a_5，$\cdots$，a_{67}

よって，求める和は

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{67} = \underbrace{2 + 8 + 14 + \cdots + 200}_{34\text{ 個}}$$

等差数列の和

$$= \frac{34}{2}(2 + 200)$$
$$= \mathbf{3434}$$

〔補足〕

$n = 2k - 1$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, 34)$　とおけて，$a_n = a_{2k-1} = 3(2k-1) - 1 = 6k - 4$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{67} = \sum_{k=1}^{34}(6k-4) = 6 \cdot \frac{34 \cdot 35}{2} - 4 \cdot 34 = \mathbf{3434}$$

3. 初項 7，公差 2 の等差数列を $\{a_n\}$ とおき，初項 2，公比 8 の等比数列を $\{b_n\}$ とおく．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 22n - 64$ を満たす n を求めよ．

(2) $a_m b_n = 96^5$ を満たす m と n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2(a_k - 5)b_k = \frac{13\cdot 8^{n+2}+8}{49}$ を満たす n を求めよ．

〔 解答例 〕

$a_n = 2n+5$，$b_n = 2\cdot 8^{n-1} (= 2\cdot(2^3)^{n-1} = 2^{3n-2})$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\{7 + (2n+5)\} = \frac{n}{2}(2n+12) = n^2 + 6n$ ← 等差数列の和

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 22n - 64$ より $n^2 + 6n = 22n - 64$ であるから $n^2 - 16n + 64 = 0$

すなわち $(n-8)^2 = 0$

よって $\boldsymbol{n = 8}$

(2) $a_m b_n = 96^5 = (2^5\cdot 3)^5$ より $(2m+5)\cdot 2^{3n-2} = 2^{25}\cdot 3^5$

m，n は自然数で $2m+5$ は奇数であるから

$$\begin{cases} 2m+5 = 3^5 \\ 2^{3n-2} = 2^{25} \end{cases}$$

よって $\boldsymbol{m = 119,\ n = 9}$

$a_k = 2k+5$
$b_k = 2\cdot 8^{k-1}$

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2(a_k - 5)b_k = \sum_{k=1}^{n} 2\cdot 2k\cdot 2\cdot 8^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 8^k$

$S_n = \Sigma$(等差)×(等比)
公比 r
は $S_n - rS_n$ を計算

とおくと

$$S_n = 1\cdot 8 + 2\cdot 8^2 + 3\cdot 8^3 + \cdots + n\cdot 8^n \quad \cdots\cdots ①$$

$$8S_n = 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8^3 + \cdots + (n-1)\cdot 8^n + n\cdot 8^{n+1} \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② として

$$-7S_n = 8 + 8^2 + 8^3 + \cdots + 8^n - n\cdot 8^{n+1}$$

等比の和

$$= \frac{8\cdot(8^n - 1)}{8-1} - n\cdot 8^{n+1}$$

$$= \frac{(1-7n)\cdot 8^{n+1} - 8}{7}$$

$$\therefore\ S_n = \frac{(7n-1)\cdot 8^{n+1} + 8}{49}$$

$S_n = \dfrac{13\cdot 8^{n+2}+8}{49}$ より $\dfrac{(7n-1)\cdot 8^{n+1}+8}{49} = \dfrac{13\cdot 8^{n+2}+8}{49}$

すなわち $7n - 1 = 13\cdot 8$

よって $\boldsymbol{n = 15}$