$\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e$ で定義された関数 $f(x) = x \log x$ に対して，次の問いに答えよ．ここで $\log x$ は x の自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1)　$y = f(x)$ の増減，およびグラフの凹凸を調べて，グラフをかけ．

(2)　関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する．その理由を述べよ．また逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求めて，$y = f^{-1}(x)$ のグラフをかけ．

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$ を求めよ．

〔2014　広島大 理学部数学科 後期〕

〔 解答例 〕

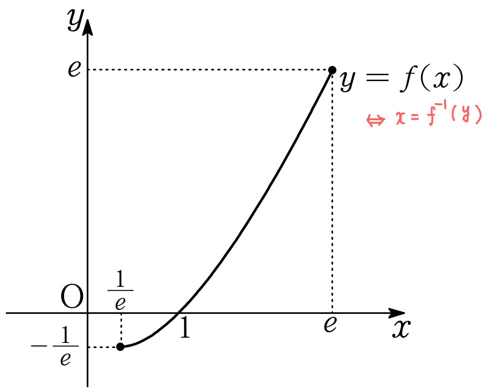
(1)　$f(x) = x\log x \quad \left(\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e\right)$

$f'(x) = \log x + 1 \geqq 0$

$f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$

増減表は次のようになる．

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$+$	
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	e



$y = f(x)$ のグラフは右のようになる．

(2)　$\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$y = f(x)$ について，$-\dfrac{1}{e} \leqq y \leqq e$ となる y の値に対して x の値がただ一つ定まる．

よって $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する．

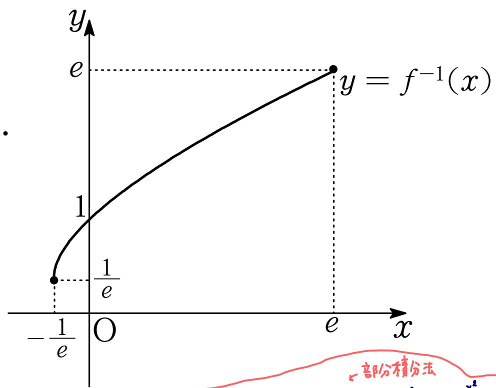
このとき　$x = f^{-1}(y) \quad \left(\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e,\ -\dfrac{1}{e} \leqq y \leqq e\right)$　である．

x と y を入れ替えて　$y = f^{-1}(x) \quad \left(\dfrac{1}{e} \leqq y \leqq e,\ -\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e\right)$　← $f^{-1}(x)$ は求めなくてよい

よって逆関数 $f^{-1}(x)$ の

定義域は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e}$**，値域は** $\boldsymbol{\dfrac{1}{e} \leqq y \leqq e}$

$y = f^{-1}(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動したグラフであるから，右図のようになる．



(3)　$\displaystyle\int_0^e f^{-1}(x)\,dx = \int_0^e f^{-1}(y)\,dy$　← $x = f^{-1}(y)$ を考えて y の積分に

y	$0 \to e$
x	$1 \to e$

$\displaystyle = \int_1^e x\,\frac{dy}{dx}\,dx$

$\displaystyle = \int_1^e x\,f'(x)\,dx$

部分積分法

別のように直接求めることもできる

$\displaystyle = \Big[\,xf(x)\,\Big]_1^e - \int_1^e f(x)\,dx$

$\displaystyle \int f(x)\,dx = \int \underbrace{x}_{積分}\underbrace{\log x}_{微分}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C$　← 部分積分法

(Cは積分定数)

$\displaystyle = ef(e) - f(1) - \left[\,\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\,\right]_1^e$　$= e^2 - 0 - \left\{\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2}{4} - \left(-\dfrac{1}{4}\right)\right\}$

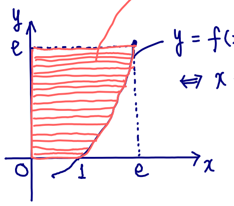
$= \boldsymbol{\dfrac{3e^2 - 1}{4}}$

㊀別 $\displaystyle\int_1^e xf'(x)\,dx = \int_1^e x(\log x + 1)\,dx = \left[\,\frac{x^2}{2}(\log x + 1) - \frac{x^2}{4}\,\right]_1^e = \boldsymbol{\frac{3e^2 - 1}{4}}$

$$\int x(\log x + 1)\,dx = \frac{x^2}{2}(\log x + 1) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}(\log x + 1) - \frac{x^2}{4} + C \quad (C\text{は積分定数})$$

補

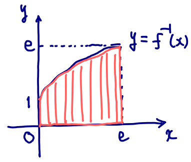
この面積が $\displaystyle\int_0^e f^{-1}(y)\,dy$

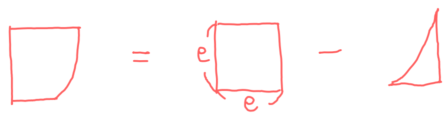


$y = f(x)$

$\Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

(2) のグラフでも





$$\int_0^e f^{-1}(y)\,dy = e^2 - \int_1^e f(x)\,dx$$

注 $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$x = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$