$\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e$ で定義された関数 $f(x)=x\log x$ に対して，次の問いに答えよ．ここで $\log x$ は x の自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1)　$y=f(x)$ の増減，およびグラフの凹凸を調べて，グラフをかけ．

(2)　関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する．その理由を述べよ．また逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求めて，$y=f^{-1}(x)$ のグラフをかけ．

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$ を求めよ．