

対数  $\log$  は自然対数とする. 正の整数  $n$  と実数  $a$  に対して

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1)  $a < 1$  のとき, 等式

$$\int_0^a \frac{x^n}{x-1} dx = S_n(a) + \log(1-a)$$

を示せ.

(2)  $0 < a < 1$  のとき, 不等式

$$\left| S_n(a) - \log \frac{1}{1-a} \right| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)(1-a)}$$

を示せ.

(3)  $a < 0$  のとき, 不等式

$$\left| S_n(a) - \log \frac{1}{1-a} \right| \leq \frac{(-a)^{n+1}}{n+1}$$

を示せ.