数学 II　図形と方程式

～高校数学のまとめ～

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

座標平面

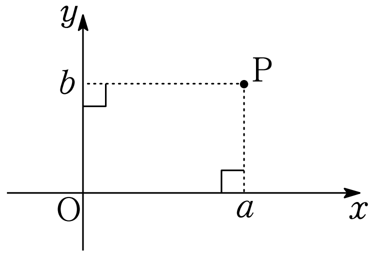
平面上に直交する 2 つの座標軸(ざひょうじく)を定めると

その平面上の点 P の位置は右の下の図のように 2 つの実数の組 $(a,\ b)$ で表される．

これを点 P の座標(ざひょう)といい $\mathrm{P}(a,\ b)$ とかく．

また 座標軸の交点を **原点**(げんてん) といい $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とかく．

座標軸の定められた平面を **座標平面**(ざひょうへいめん) という．



とくに何も条件がないとき，座標平面の座標軸は x 軸，y 軸として考える．

座標平面の象限

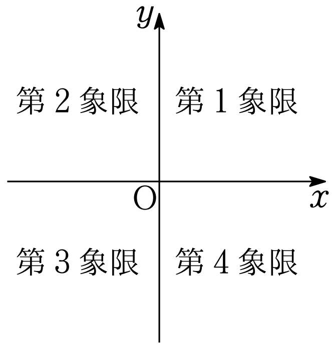
座標平面を座標軸により 4 つの部分に分けて，次のようにいう．

$\boxed{1}$ $\{(x,\ y) \mid x>0$ かつ $y>0\}$ を **第 1 象限**(しょうげん)

$\boxed{2}$ $\{(x,\ y) \mid x<0$ かつ $y>0\}$ を **第 2 象限**

$\boxed{3}$ $\{(x,\ y) \mid x<0$ かつ $y<0\}$ を **第 3 象限**

$\boxed{4}$ $\{(x,\ y) \mid x>0$ かつ $y<0\}$ を **第 4 象限**



ただし

$\{(x,\ y) \mid x=0$ または $y=0\}$ (座標軸) はどの象限にも含まれない．

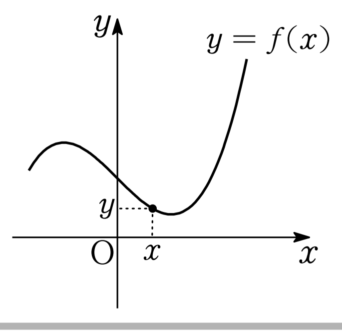
関数のグラフ

関数 $y=f(x)$ について

$\{(x,\ y) \mid y=f(x)\}$ の点全体からなる図形を

座標平面に表したものを

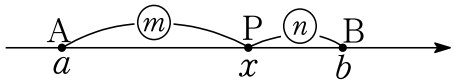
関数 $y=f(x)$ の **グラフ** という．



数直線の内分点

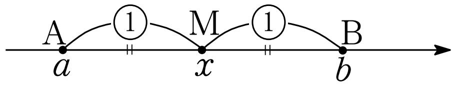
数直線上で点 $\mathrm{A}(a)$ と点 $\mathrm{B}(b)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ （$m>0,\ n>0$）に内分する点を $\mathrm{P}(x)$ とすると

$$x=\frac{na+mb}{m+n}$$



とくに 線分 AB を $1:1$ に内分する点，つまり線分 AB の中点を $\mathrm{M}(m)$ とすると

$$x=\frac{a+b}{2}$$



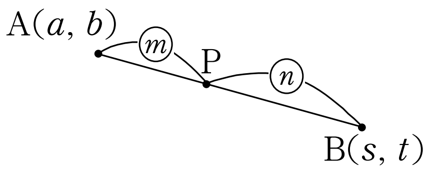
考 $a<b$ のとき $\mathrm{AP}=\dfrac{m}{m+n}\mathrm{AB}=\dfrac{(b-a)m}{m+n}$

$$x=a+\frac{(b-a)m}{m+n}=\frac{na+mb}{m+n}$$

座標平面の内分点

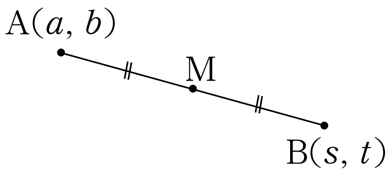
座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(s,\ t)$ に対し，線分 AB を $m:n$ （$m>0,\ n>0$）に内分する点を P とすると

$$\mathrm{P}\left(\frac{na+ms}{m+n},\ \frac{nb+mt}{m+n}\right)$$



とくに 線分 AB を $1:1$ に内分する点，つまり 線分 AB の中点を M とすると

$$\mathrm{M}\left(\frac{a+s}{2},\ \frac{b+t}{2}\right)$$



考 x 座標，y 座標それぞれで $\boxed{\text{数直線の内分点}}$ を考える．

補 ベクトルで考えるとわかりやすい．

数直線の外分点

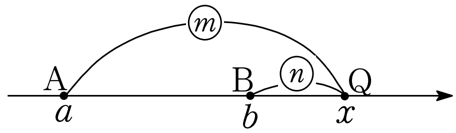
数直線上で点 A(a) と点 B(b) を結ぶ線分 AB を $m:n$（$m>0,\ n>0$）に外分する点を Q(x) とすると

$$x=\frac{(-n)a+mb}{m+(-n)}$$

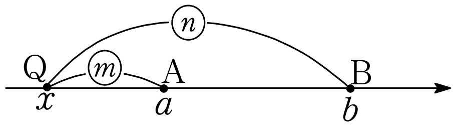
または

$$x=\frac{na+(-m)b}{(-m)+n}$$

〔$m>n$ のとき〕



〔$m<n$ のとき〕



補 数直線の内分点 で m を $-m$ または n を $-n$ に置き換えている.

考 $a<b$，$m>n$ のとき $\mathrm{AQ}=\dfrac{m}{m-n}\mathrm{AB}=\dfrac{(b-a)m}{m-n}$

$$x=a+\frac{(b-a)m}{m-n}=\frac{-na+mb}{m-n}$$

座標平面の外分点

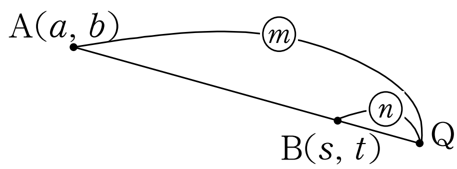
座標平面上の 2 点 A$(a,\ b)$，B$(s,\ t)$ に対し，線分 AB を $m:n$（$m>0,\ n>0$）に外分する点を Q とすると

$$\mathrm{Q}\left(\frac{(-n)a+ms}{m+(-n)},\ \frac{(-n)b+mt}{m+(-n)}\right)$$

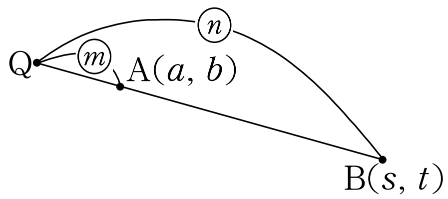
または

$$\mathrm{Q}\left(\frac{na+(-m)s}{(-m)+n},\ \frac{nb+(-m)t}{(-m)+n}\right)$$

〔$m>n$ のとき〕



〔$m<n$ のとき〕



考 x 座標，y 座標それぞれで 数直線の外分点 を考える.

補 ベクトルで考えるとわかりやすい.

座標平面の三角形の重心

座標平面上で

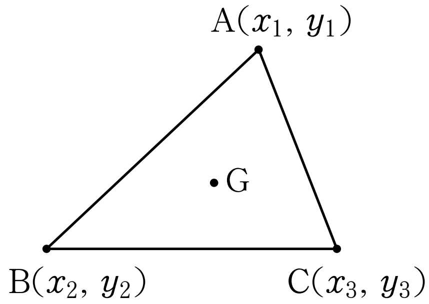
3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点

とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の**重心**を G とすると

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

つまり

G(3 頂点の x 座標の平均値, 3 頂点の y 座標の平均値)



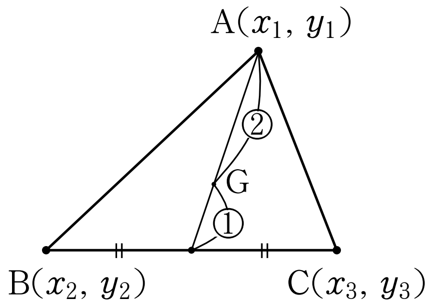
考 線分 BC の中点を M とすると

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

点 G は線分 AM を 2 : 1 に内分するので

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)$$

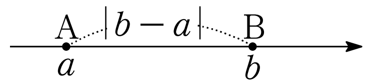
よって $\mathrm{G}\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$



数直線の 2 点間の距離

数直線上で点 A(a) と点 B(b) の距離 AB は

$\mathrm{AB} = |b - a|$ または $\mathrm{AB} = |a - b|$



座標平面の 2 点間の距離

座標平面上で 2 点 A(x_1, y_1) と点 B(x_2, y_2) の距離 AB は

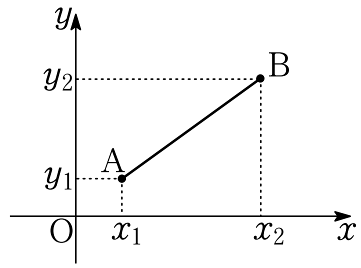
$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

つまり

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x\,\text{座標の差})^2 + (y\,\text{座標の差})^2}$$

とくに 2 点 O$(0, 0)$ と点 P(p, q) の距離 OP は

$$\mathrm{OP} = \sqrt{p^2 + q^2}$$



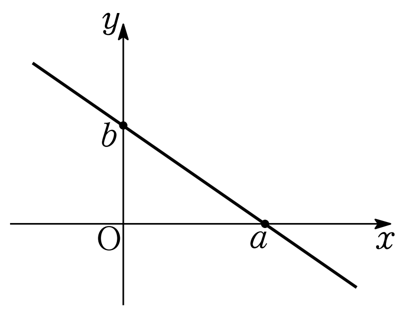
例 x 座標，y 座標それぞれで 数直線の 2 点間の距離 を考えて，三平方の定理を利用する．

x 切片，y 切片

直線が x 軸，y 軸とそれぞれ点 $(a, 0)$，点 $(0, b)$ で交わるとき

a をこの直線の x 切片（せっぺん）という．

b をこの直線の y 切片（せっぺん）という．



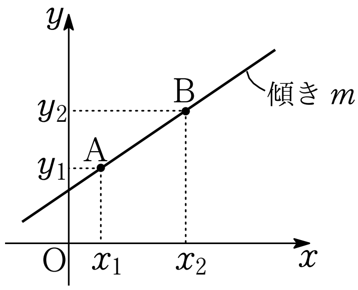
座標平面の直線の傾き

座標平面における直線の傾(かたむ)きは $\dfrac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}$

すなわち

2 点 A(x_1, y_1), B(x_1, y_1) $(x_1 \neq x_2)$ を通る直線の傾きを m とすると

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{または} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

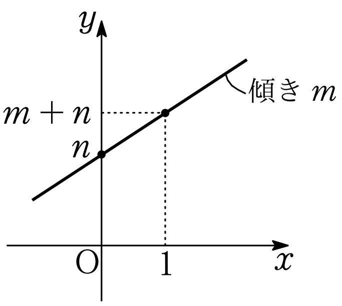


つまり　$(\text{傾き}) = \dfrac{(y\text{座標の差})}{(x\text{座標の差})}$

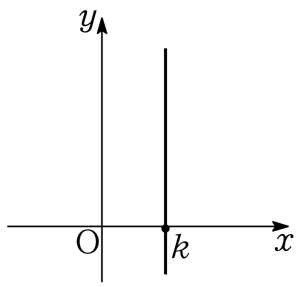
座標平面における直線の方程式

座標平面上の直線の方程式について

1



2



1 傾きが m, y 切片が n の直線の方程式は

$$y = mx + n$$

2 y 軸に平行で, x 切片が k の直線の方程式は

$$x = k$$

直線の方程式の一般形は a, b, c を定数, $(a, b) \neq (0, 0)$ として

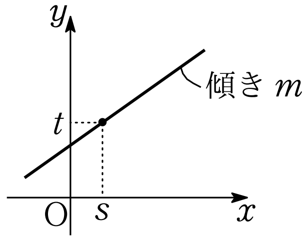
$$ax + by + c = 0$$

座標平面において通る点と傾きがわかる直線の方程式

座標平面で

傾きが m，点 $(s,\,t)$ を通る直線の方程式は

$$y=m(x-s)+t$$



㊗ $y-t=m(x-s)$ と表すこともできる．

㊟ x の係数を傾き m にして，$x=s$ とすると $y=t$ となるようにする．

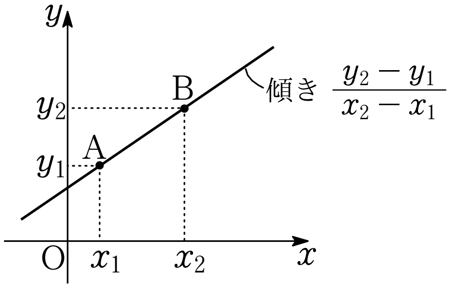
㊡ 傾き 2，点 $(1,\,3)$ を通る直線の方程式は

$y=2(x-1)+3$ すなわち $y=2x+1$

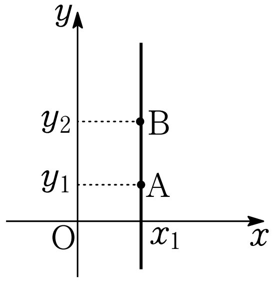
座標平面の 2 点を通る直線の方程式

座標平面の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\,y_1)$，$\mathrm{B}(x_1,\,y_1)$ を通る直線を ℓ とすると

$\boxed{1}$



$\boxed{2}$



$\boxed{1}$ $x_1 \neq x_2$ のとき

$$\ell : y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$$

$\boxed{2}$ $x_1=x_2$ のとき

$$\ell : x=x_1$$

x 切片，y 切片がわかる直線の方程式

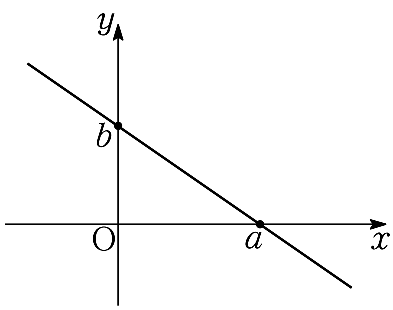
$a \neq 0$，$b \neq 0$ のとき

x 切片が a，y 切片が b の直線

つまり

2 点 $(a,\,0)$，$(0,\,b)$ を通る直線の方程式は

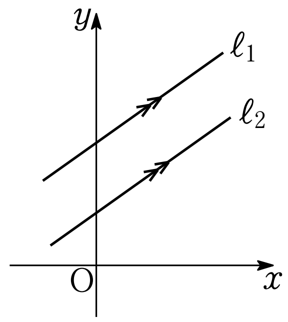
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



座標平面における 2 直線の平行条件

座標平面にある 2 本の直線 ℓ_1，ℓ_2 が平行(へいこう)なとき，次が成り立つ.

ただし，2 本の直線が一致する場合も平行とする.



$\boxed{1}$ $\begin{cases} \ell_1 : y = mx + n \\ \ell_2 : y = px + q \end{cases}$

ならば

$$m = p$$

つまり ℓ_1 と ℓ_2 の傾きが等しい

$\boxed{2}$ $(a, b) \neq (0, 0)$ かつ $(s, t) \neq (0, 0)$ とする.

$$\begin{cases} \ell_1 : ax + by + c = 0 \\ \ell_2 : sx + ty + u = 0 \end{cases}$$

ならば

$$a : b = s : t \iff at - bs = 0$$

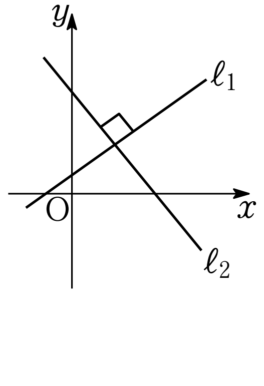
つまり ℓ_1 と ℓ_2 の x と y の係数の比が等しい

考 $\boxed{2}$ ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n_1} = (a, b)$，$\vec{n_2} = (s, t)$ とすると $\vec{n_1} /\!/ \vec{n_2}$

座標平面における 2 直線の垂直条件

座標平面にある 2 本の直線 ℓ_1，ℓ_2 が垂直(すいちょく)であるとき，次が成り立つ.

$\boxed{1}$ $\begin{cases} \ell_1 : y = mx + n \\ \ell_2 : y = px + q \end{cases}$



ならば

$$mp = -1$$

つまり ℓ_1 と ℓ_2 の傾きの積が -1

$\boxed{2}$ $(a, b) \neq (0, 0)$ かつ $(s, t) \neq (0, 0)$ とする.

$$\begin{cases} \ell_1 : ax + by + c = 0 \\ \ell_2 : sx + ty + u = 0 \end{cases}$$

ならば

$$as + bt = 0$$

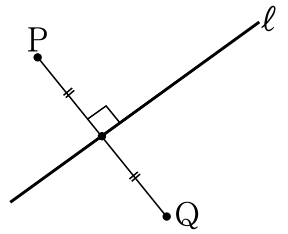
つまり ℓ_1 と ℓ_2 の x と y の係数の積の和が 0

考 $\boxed{2}$ ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n_1} = (a, b)$，$\vec{n_2} = (s, t)$ とすると $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$

直線に関する対称点

2 点 P と Q が直線 ℓ に関して対称になるとき

次の 2 つが成り立つ.

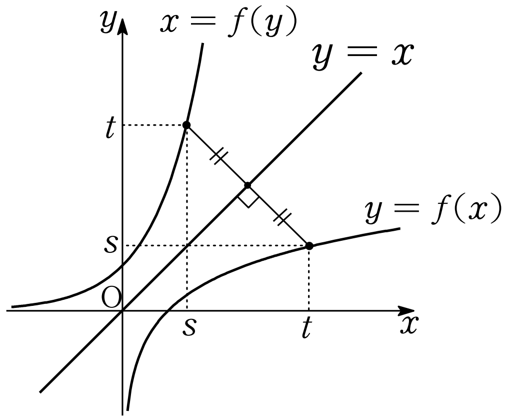


[1] 線分 PQ の中点が ℓ 上にある.

[2] $\ell \perp \mathrm{PQ}$

座標平面における直線 $y=x$ に関する対称移動

座標平面において



[1] 点 $(s,\,t)$ を

直線 $y=x$ に関して対称移動すると

点 $(t,\,s)$

[2] $y=f(x)$ を

直線 $y=x$ に関して対称移動すると

$x=f(y)$

つまり x 座標と y 座標を入れかえた 2 点は直線 $y=x$ に関して対称

考 [1] 点 $\mathrm{P}(s,\,t)$ を直線 $y=x$ に関して対称移動した点を Q とする.

点 P が $y=x$ 上にあるときは $t=s$ なので $\mathrm{Q}(t,\,s)$

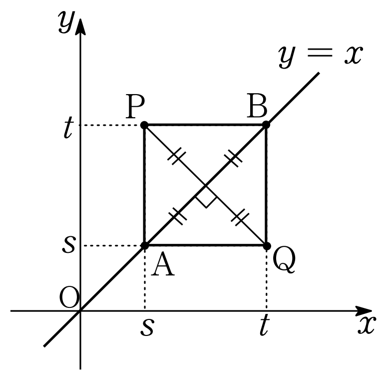
点 P が $y=x$ 上にないとき

点 P を通り軸に垂直な 2 直線 $x=s$，$y=t$ と直線 $y=x$ の

それぞれの交点を $\mathrm{A}(s,\,s)$，$\mathrm{B}(t,\,t)$ とすると

右の図のようになる.

四角形 PAQB は正方形なので $\mathrm{Q}(t,\,s)$



別 上と同じ設定で，点 P が $y=x$ 上にないとき $\mathrm{Q}(a,\,b)$ とすると

線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{s+a}{2},\,\dfrac{t+b}{2}\right)$ が $y=x$ 上にあるので

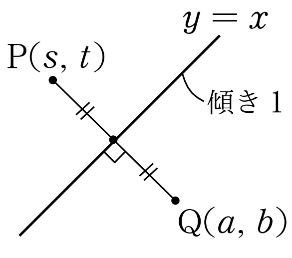
$\dfrac{t+b}{2}=\dfrac{s+a}{2}$ すなわち $a-b=t-s$ ……①

直線 PQ と $y=x$ は直交するので，傾きの積が -1 より

$\dfrac{t-b}{s-a}\cdot 1=-1$ すなわち $a+b=t+s$ ……②

①, ② を連立して $a=t,\, b=s$

よって $\mathrm{Q}(t,\,s)$



例 [1] 点 $(2,\,1)$ を直線 $y=x$ に関して対称移動すると $(1,\,2)$

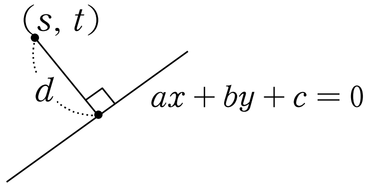
例 [1] $y=10^x$ を直線 $y=x$ に関して対称移動すると $x=10^y$ すなわち $y=\log_{10}x$

座標平面での点と直線の距離

座標平面で

点 $(s,\ t)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



(補) 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から直線 $ax+by+c=0$ へ垂線 PH を下ろして $\mathrm{PH}=d$

(考) $ax+by+c=0$ ……①

① は直線なので $(a,\ b)\neq(0,\ 0)$

$\mathrm{P}(s,\ t)$ として，点 P を通り ① に直交する直線を ℓ とし，ℓ と ① の交点を H とする．

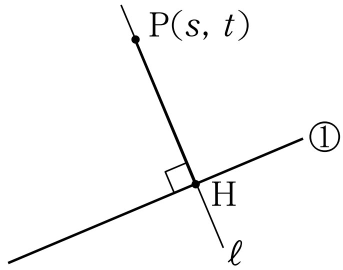
$\ell : b(x-s)-a(y-t)=0$ ……②

① は $a(x-s)+b(y-t)=-(as+bt+c)$ ……①′

①′，② を連立して

$$x-s=-\frac{a(as+bt+c)}{a^2+b^2}$$

$$y-t=-\frac{b(as+bt+c)}{a^2+b^2}$$



これらを満たす x，y が $\mathrm{H}(x,\ y)$ となるので

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}^2&=(x-s)^2+(y-t)^2\\&=\frac{(a^2+b^2)(as+bt+c)^2}{(a^2+b^2)^2}\\&=\frac{(as+bt+c)^2}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

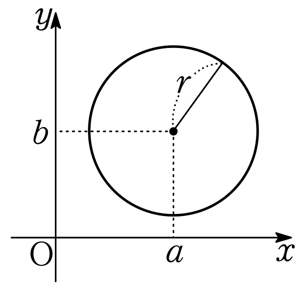
よって，点 P と ① の距離は $\mathrm{PH}=\dfrac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

座標平面における円の方程式

座標平面の円について

中心が (a, b) 半径が r $(r>0)$ の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



円の方程式の一般形は l，m，n を定数として

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

ただし，円になる条件は $l^2+m^2-4n>0$

㊫ $x^2+y^2+lx+my+n=0 \iff \left(x+\dfrac{l}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{m}{2}\right)^2=\dfrac{l^2+m^2-4n}{4}$

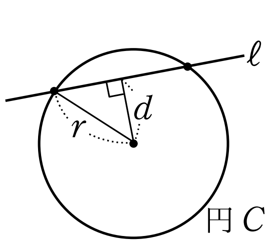
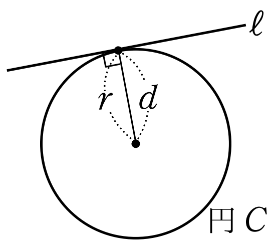
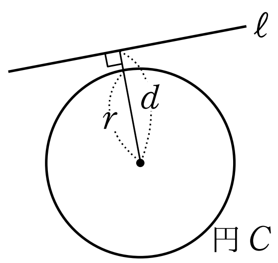
$l^2+m^2-4n>0$ ならば 中心 $\left(-\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{m}{2}\right)$，半径 $\sqrt{\dfrac{l^2+m^2-4n}{2}}$ の円を表す．

円と直線の位置関係

平面上に円 C と直線 ℓ がある．

円 C の中心と直線 ℓ の距離を d，円 C の半径を r として，

円 C と直線 ℓ の位置関係は次のようになる．

d と r	$d<r$	$d=r$	$d>r$
位置関係	異なる 2 点で交わる	1 点で接する	共有点をもたない
グラフ			

中心が原点の円の接線の方程式

座標平面において

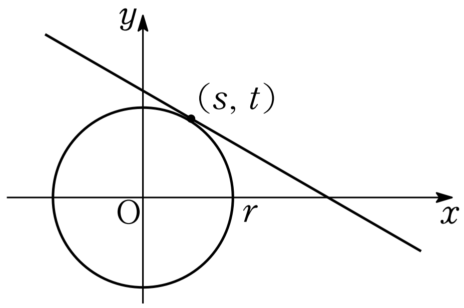
円：$x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 上の点 $(s,\ t)$

における**接線の方程式**は

$s^2+t^2=r^2$

のもとで

$sx+ty=r^2$



補 円の方程式で x^2 を sx，y^2 を ty とすると接線の方程式になる．

考 接点を $\mathrm{T}(s,\ t)$ とおくと，円 $x^2+y^2=r^2$ 上にあるので

$s^2+t^2=r^2$ ……①

接線を ℓ として

あ $t=0$ のとき

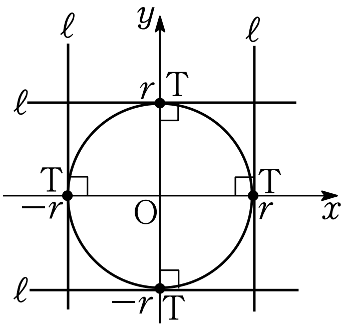
$(s,\ t)=(-r,\ 0)$ ならば

ℓ の方程式は $x=-r$ すなわち $-r\cdot x+0\cdot y=r^2$

$(s,\ t)=(r,\ 0)$ ならば

ℓ の方程式は $x=r$ すなわち $r\cdot x+0\cdot y=r^2$

つまり $\ell : sx+ty=r^2$



い $s=0$ のとき

$(s,\ t)=(0,\ -r)$ ならば

ℓ の方程式は $y=-r$ すなわち $0\cdot x+(-r)\cdot y=r^2$

$(s,\ t)=(0,\ r)$ ならば

ℓ の方程式は $\ell : y=r$ すなわち $0\cdot x+r\cdot y=r^2$

つまり $\ell : sx+ty=r^2$

う $s\neq 0$ かつ $t\neq 0$ のとき

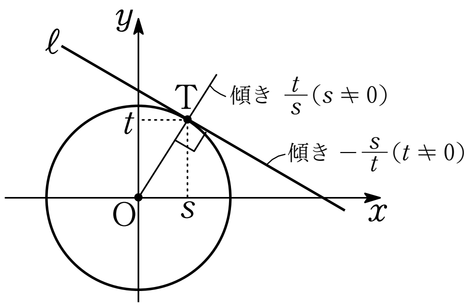
直線 OT の傾きは $\dfrac{t}{s}$

$\mathrm{OT}\perp\ell$ より傾きの積が -1 を考えて ℓ の傾きは $-\dfrac{s}{t}$

ℓ の方程式は $y=-\dfrac{s}{t}(x-s)+t$

両辺 t をかけて整理すると $sx+ty=s^2+t^2$

① を代入して $sx+ty=r^2$



補 示し方はベクトルの内積，微分，2 次方程式の重解をもつ条件など他にもいろいろある．

中心が原点以外の円の接線の方程式

座標平面において

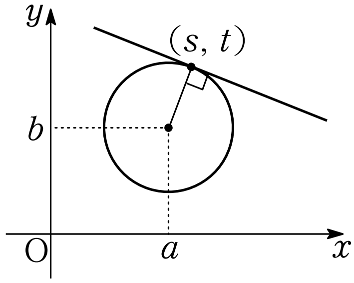
円：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ 上の点 $(s,\ t)$

における**接線の方程式**は

$$(s-a)^2+(t-b)^2=r^2$$

のもとで

$$(s-a)(x-a)+(t-b)(y-b)=r^2$$



考 円：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ とその円上の点 $(s,\ t)$ における接線を

x 軸方向に $-a$，y 軸方向に $-b$ だけ平行移動して

円：$x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(s-a,\ t-b)$ における接線になるから，

中心が原点の円の接線の方程式から方程式は

$(s-a)^2+(t-b)^2=r^2$ のもとで $(s-a)x+(t-b)y=r^2$

これを x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動して

$$(s-a)(x-a)+(t-b)(y-b)=r^2$$

極線の方程式

座標平面において

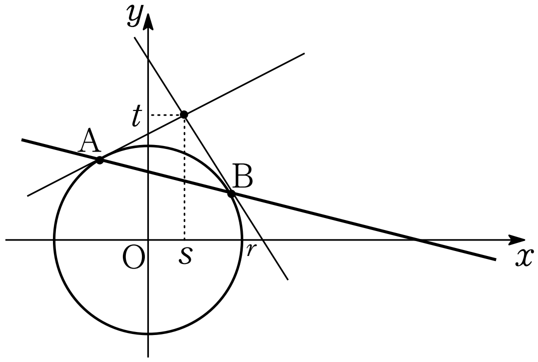
円：$x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ の外部にある点 $(s,\,t)$ から円へ 2 本の接線を引き，それらの接点をそれぞれ A，B する．

このとき，直線 AB の方程式は

$$s^2+t^2>r^2$$

のもとで

$$sx+yt=r^2$$



㊓ この直線 AB をこの円の 極線（きょくせん） という．

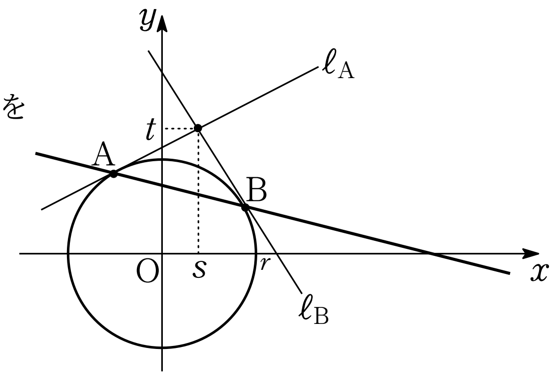
㊔ $x^2+y^2=r^2$ ……①

とおく．

① 上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\,y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\,y_2)$ における接線をそれぞれ ℓ_{A}，ℓ_{B} とすると

$\ell_{\mathrm{A}}：x_1x+y_1y=r^2$

$\ell_{\mathrm{B}}：x_2x+y_2y=r^2$



これらが $(s,\,t)$ を通るとして

$$\begin{cases} sx_1+ty_1=r^2 \\ sx_2+ty_2=r^2 \end{cases}$$

これは 2 点 A，B が直線 $sx+ty=r^2$ を通ることを表すので

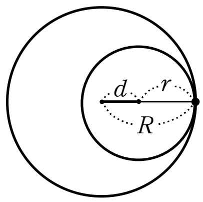
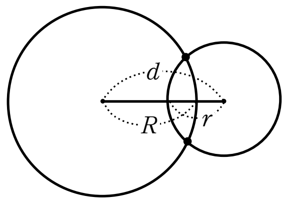
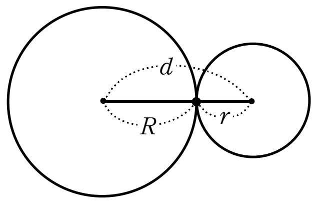
$\mathrm{AB}：sx+ty=r^2$

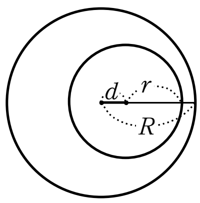
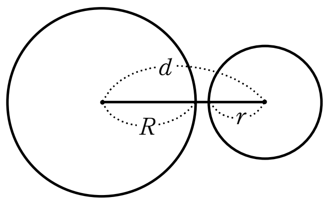
2つの円の位置関係

平面上に2つの円がある．

中心間の距離を d，半径をそれぞれ R，r $(R > r)$ として

2つの円の位置関係は次のようになる．

d と R，r	$d = R - r$	$R - r < d < R + r$	$d = R + r$
2つの円の位置関係	内接する （共有点1個）	異なる2点で交わる （共有点2個）	外接する （共有点1個）
グラフ			

d と R，r	$d < R - r$	$d > R + r$
2つの円の位置関係	内包する （共有点0個）	共有点をもたない （共有点0個）
グラフ		

$R = r$ のときも成り立つが「内接する」ことや「内包する」ことはない．

2つの円が共有点をもつ条件は $R - r \leqq d \leqq R + r$

㊓ 2つの円の位置関係は中心間の距離と2つの円の半径で決まる．

㊓ 2つの円が接するとき，接点は2つの円の中心を結ぶ直線上にある．

2つの図形の共有点を通る図形の方程式（束）

座標平面において

共有点をもつ2つの図形 $\begin{cases} f(x,\ y)=0 \\ g(x,\ y)=0 \end{cases}$

の共有点を通る図形の方程式は，実数 s，t を用いて

$$s\,f(x,\ y)+t\,g(x,\ y)=0$$

と表せる．

あるいは，実数 k を用いて

$$f(x,\ y)+k\,g(x,\ y)=0 \quad \text{または} \quad g(x,\ y)=0$$

と表せる．

㊂ 2つの図形 $\begin{cases} f(x,\ y)=0 \\ g(x,\ y)=0 \end{cases}$ の共有点を $(\alpha,\ \beta)$ とすると $\begin{cases} f(\alpha,\ \beta)=0 \\ g(\alpha,\ \beta)=0 \end{cases}$ をみたす．

任意の実数 s，t に対して $s\,f(\alpha,\ \beta)+t\,g(\alpha,\ \beta)=0$ が成り立つ．

つまり $s\,f(x,\ y)+t\,g(x,\ y)=0$ ……㊌

は共有点 $(\alpha,\ \beta)$ を通る図形の方程式である．

$s \fallingdotseq 0$ のとき ㊌ の両辺を s でわって $f(x,\ y)+\dfrac{t}{s}\,g(x,\ y)=0$

$\dfrac{t}{s}=k$ とおいて $f(x,\ y)+k\,g(x,\ y)=0$

$s=0$ のとき ㊌ は $t\,g(x,\ y)=0$

これは $g(x,\ y)=0$ 自身が共有点を通ることを表す．

㊎ 共有点を通る図形は様々で，すべてを表すわけではない．

2つの円の共通弦の方程式

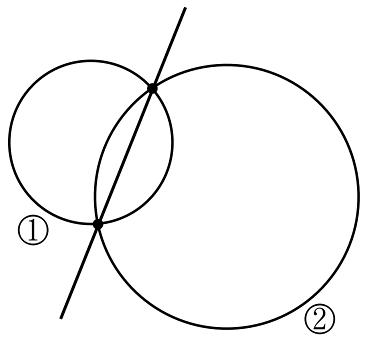
座標平面で異なる2点で交わる2つの円

$$\begin{cases} x^2+y^2+lx+my+n=0 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2+ax+by+c=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

の交点を通る直線（共通弦）の方程式は

①－② として

$$(l-a)x+(m-b)y+n-c=0$$



つまり ① と ② を連立して x^2，y^2 を消去すると共通弦の方程式になる．

軌跡

与えられた条件を満たす点全体の図形を，その条件を満たす点の **軌跡**（きせき）という．

軌跡の証明

与えられた条件を満たす点の軌跡が図形 F であることを証明するには，
次の 2 つを示せばよい．

$\boxed{1}$ 与えられた条件を満たす点は 図形 F 上にある．

$\boxed{2}$ 逆に，図形 F 上のすべての点は 与えられた条件を満たす．

$\boxed{2}$ に関しては，明らかな場合は 証明を省略してもよい．

座標平面における軌跡の求め方

座標平面における軌跡の求め方には，次の手順で求める方法がある．

$\boxed{1}$ 求める軌跡の点を (X, Y) とおく．

$\boxed{2}$ 条件より X と Y の関係式を作る．（これが軌跡の満たす方程式になる）

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ のときの点 (X, Y) が条件を満たすことを確認する．

$\boxed{3}$ に関しては，$\boxed{2}$ で同値変形できているなど明らかなときは省略してもよい．

以上から作られた X と Y の集合が求める軌跡である．

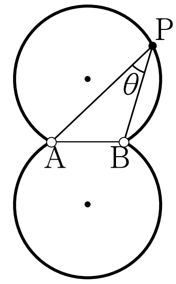
補 点 (X, Y) とおくと説明したが，おく文字は何でもよい．
つまり，点 (x, y) や点 (a, b) とおいても求める軌跡は同じになる．
例えば $\{(X, Y) \mid Y = X^2\} = \{(x, y) \mid y = x^2\} = \{(a, b) \mid b = a^2\}$
文字は違うが同じ集合なので同じ図形となる．

定角の軌跡

平面上に異なる 2 定点 A，B がある．

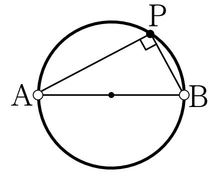
この平面上で $\angle \mathrm{APB} = \theta$ (θ は一定) を満たす点 P の軌跡は

右上図のような弦 AB の円の一部



とくに $\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$ のときの点 P の軌跡は

右下図のような直径 AB の円の 2 点 A，B を除く部分



考 同じ弧に対する円周角は等しいことを考える．

補 「平面上」が「空間内」になると「円」が「球」になる．

アポロニウスの円

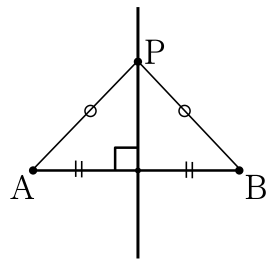
平面上に異なる 2 定点 A，B がある．

この平面上で $\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = m : n$ ($m > 0$，$n > 0$) を満たす点 P の軌跡は

次のようになる．

1 $m = n$ のとき

線分 AB の垂直二等分線

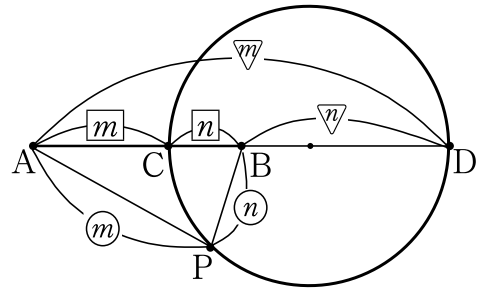


2 $m \neq n$ のとき

線分 AB を $m : n$ に内分する点を C

線分 AB を $m : n$ に外分する点を D

として 線分 CD を直径とする円



要

軌跡を求めるときは

図形的に求める，座標平面で方程式を作る，などの方法がある．

領域

x，y についての不等式があるとき，それを満たす点 (x, y) 全体の集合を

その不等式の表す 領域（りょういき） という．

とくに 領域を分ける線を 境界線（きょうかいせん） または 境界（きょうかい） という．

境界線が $y=f(x)$ の領域

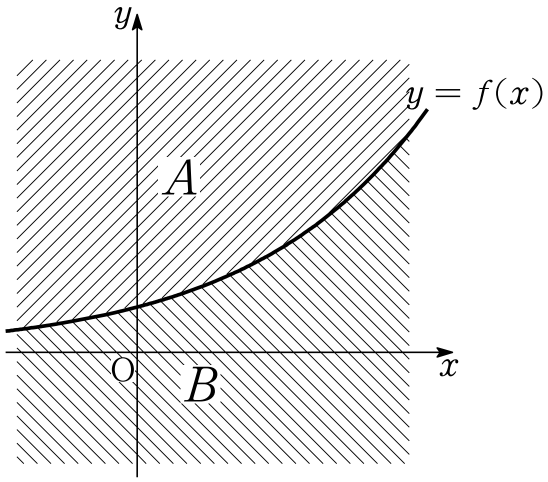
座標平面に $y=f(x)$ がある．

$\boxed{1}$ $A=\{(x, y) \mid y>f(x)\}$

の表す領域は $y=f(x)$ の上側

$\boxed{2}$ $B=\{(x, y) \mid y<f(x)\}$

の表す領域は $y=f(x)$ の下側



境界線が円の領域

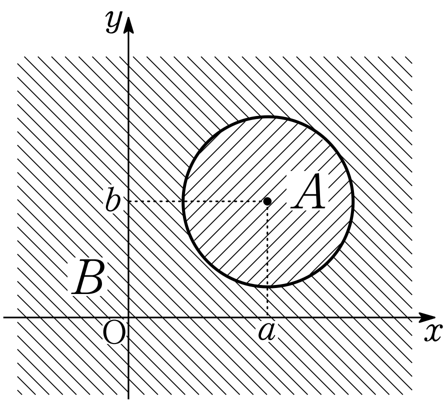
座標平面に円：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ がある．

$\boxed{1}$ $A=\{(x, y) \mid (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$

の表す領域は円の内側

$\boxed{2}$ $B=\{(x, y) \mid (x-a)^2+(y-b)^2>r^2\}$

の表す領域は円の外側



座標平面において条件が領域の最大・最小問題

領域 D を満たす (x, y) に対して $F(x, y)$ の最大値．最小値を求める問題は次の手順で求める方法がある．

$\boxed{1}$ 条件の領域 D を図示する．

$\boxed{2}$ $F(x, y)=k$ として，これが条件の領域 D と共有点をもって，k が最大，最小となる点を考える．（共有点の x, y に対して実数 k が存在する）

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ のときの点における k が最大値，最小値となる．

例

$$D:\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x+4 \\ y \leqq 2x+4 \\ y \geqq \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2} \end{cases}$$ を満たす (x, y) に対して，$x+y$ の最大値と最小値を求める．

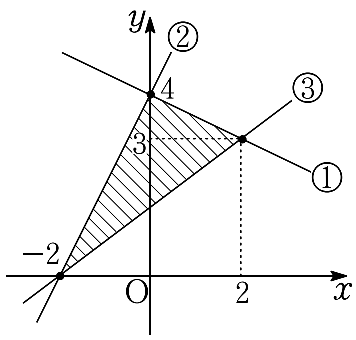
$\boxed{1}$ D の境界線は

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x+4 & \cdots\cdots① \\ y=2x+4 & \cdots\cdots② \\ y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2} & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①，② の交点は $(0, 4)$，①，③ の交点は $(2, 3)$

②，③ の交点は $(-2, 0)$

D を図示すると右図斜線部（境界線を含む）



$\boxed{2}$ $x+y=k$ ……④

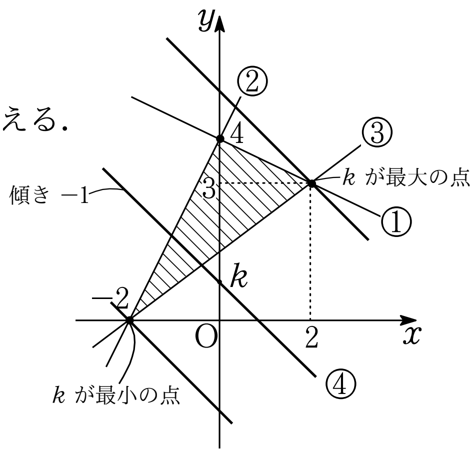
すなわち $y=-x+k$ とする．

④ は傾き -1，y 切片 k の直線である．

これが D と共有点をもち，k が最大，最小になる点を考える．

$(x, y)=(2, 3)$ のとき k は最大で $k=5$

$(x, y)=(-2, 0)$ のとき k は最小で $k=-2$

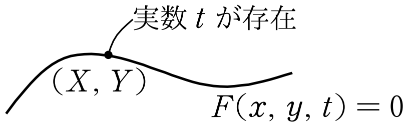


$\boxed{3}$ よって $\begin{cases} \textbf{最大値 } \mathbf{5} & (\boldsymbol{x=2,\ y=3}) \\ \textbf{最小値 } \mathbf{-2} & (\boldsymbol{x=-2,\ y=0}) \end{cases}$

存在条件と通過領域（逆像法）

座標平面で媒介変数を t とする図形 $F(x,\,y,\,t)=0$ が

通過する点を $(X,\,Y)$ とすると　$F(X,\,Y,\,t)=0$



このとき

　実数 t が存在する $\iff$ 点 $(X,\,Y)$ が存在する

　実数 t が存在しない $\iff$ 点 $(X,\,Y)$ が存在しない

すなわち　$F(x,\,y,\,t)=0$　が通過する領域は

$F(X,\,Y,\,t)=0$ を満たす実数 t が存在する点 $(X,\,Y)$ の集合である．

(補) 逆手流ともいう．

(例)

実数 t に対して座標平面の直線 $\ell_t : y=2tx-t^2$ を考える．
t が実数全体を動くとき，直線 ℓ_t が通過する領域を図示する．

ℓ_t が通過する点を $(X,\,Y)$ とすると

$Y=2tX-t^2$　すなわち　$t^2-2Xt+Y=0$　……(*)

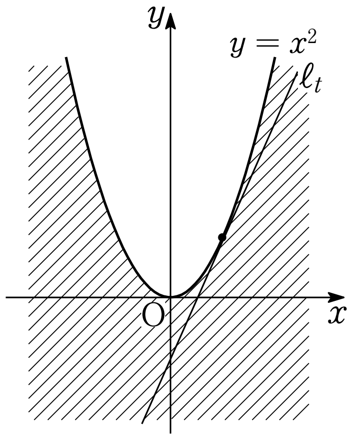
これを満たす実数 t が存在する条件を考える．

(*) の判別式を D として

$$\frac{D}{4}=X^2-Y \geqq 0 \qquad \therefore Y \leqq X^2$$

よって，ℓ_t が通過する領域は $y \leqq x^2$

図示すると右図斜線部（境界線含む）．



(補) ℓ_t が $(X,\,Y)=(1,\,0)$ を通過する点かを調べると

(*) より $t^2-2\cdot1\cdot t+0=0$　すなわち　$t(t-2)=0$

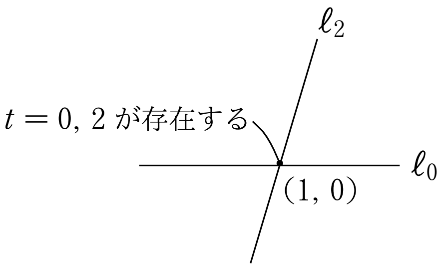
$t=0,\,2$ の実数 t が存在するから通過する点とわかる．

$\ell_0 : y=0$，$\ell_2 : y=4x-4$ が通過することもわかる．

また，ℓ_t が $(X,\,Y)=(1,\,2)$ が通過する点かを調べると

(*) より $t^2-2\cdot1\cdot t+2=0$　すなわち　$t^2-2t+2=0$

実数 t が存在しないから通過しない点とわかる．



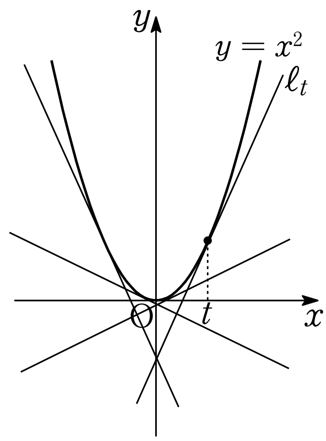
(補) $\begin{cases} \ell_t : y=2tx-t^2 \\ y=x^2 \end{cases}$　を連立すると $(x-t)^2=0$

つまり ℓ_t は $y=x^2$ に $x=t$ で接していることがわかる．

ℓ_t は $y=x^2$ 上の点 $(t,\,t^2)$ における接線であり，

接点を動かして接線を引いていくと通過領域が決まる．

ℓ_t が接しながら通過する曲線 $y=x^2$ を 包絡線（ほうらくせん） という．



(補) Geogebra で $y=2tx-t^2$ の通過領域を作成してみました．

Geogebra で通過領域をみる

ファクシミリの原理（順像法）

座標平面で媒介変数を t とする図形 $y=f(x,\,t)$ が通過する領域は

次の手順で求めることができる．

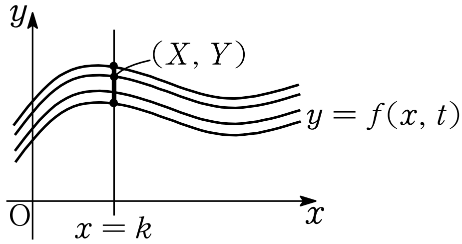
$\boxed{1}$ 通過する点を $(X,\,Y)$ として $Y=f(X,\,t)$ を満たすことから

$X=k$ と X の値を固定し，

Y を t の関数 $Y=g(t)=f(k,\,t)$ とみて，

Y のとりうる値の範囲を調べる．

$\boxed{2}$ 固定した X を動かして，通過領域を決定する．



補 順手流ともいう．

話 慣れてくると文字で置かずにできる．

考 x の値ごとに図形が通過する範囲を考えてる．

FAX(ファックス) のように紙にインクをつけていくイメージ．(時代遅れのネーミング)

例

実数 t に対して座標平面の直線 $\ell_t : y=2tx-t^2$ を考える．
t が実数全体を動くとき，直線 ℓ_t が通過する領域を図示する．

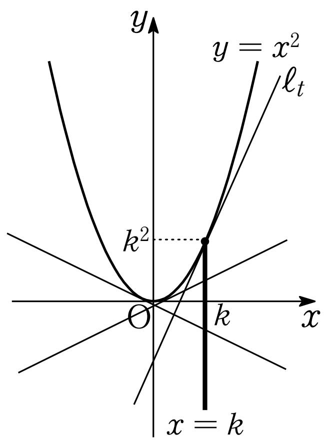
$\boxed{1}$ ℓ_t が通過する点を $(X,\,Y)$ とすると

$$Y=2tX-t^2$$

$X=k$ と固定すると

$$Y=2tk-t^2=-t^2+2kt=-(t-k)^2+k^2$$

これを t の関数とみて，実数 t を動かすと $Y \leqq k^2$



$\boxed{2}$ $\begin{cases} X=k \\ Y \leqq k^2 \end{cases}$ であるから $Y \leqq X^2$

よって，ℓ_t が通過する領域は $y \leqq x^2$

図示すると下図縦線部（境界線含む）．