追加問題　二学期第 4 講　解答例

**1.**　自然数 $N=3^{79}$ について，以下の問に答えよ．
必要ならば，次の値（小数第 5 位を四捨五入したもの）を用いてよい．
$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$
(1)　$N$ は何桁の数か．
(2)　$N$ の最高位の数字は何か．

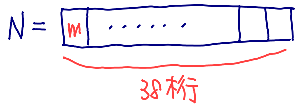
〔解答例〕

(1)　$\log_{10}N=\log_{10}3^{79}=79\times 0.4771=37.6909$

$\therefore N=10^{37.6909}$ ……①

これより　$10^{37}<N<10^{38}$

よって $N$ は **38 桁**




(2)　$N$ の最高位の数字を $m$ $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ とすると

$$m\cdot 10^{37}\leqq N<(m+1)\cdot 10^{37}$$

① より　$m\cdot 10^{37}\leqq 10^{37.6909}<(m+1)\cdot 10^{37}$

各辺 $10^{37}$ で割って　$m\leqq 10^{0.6909}<m+1$

すなわち　$\log_{10}m\leqq 0.6909<\log_{10}(m+1)$

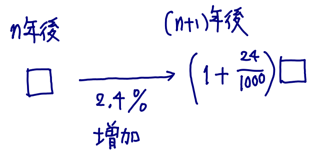
ここで　$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$，$\log_{10}5=1-\log_{10}2=0.6990$

よって $m=4$ であるから $N$ の最高位の数字は **4**

$\underbrace{\log_{10}5}_{0.6020}<0.6909<\underbrace{\log_{10}6}_{0.6990}$

**2.**　世界の人口が，1 年間に 2.4 % の割合で増加し続けるとすると，60 億人の人口が 2 倍の 120 億人を突破するのは何年後か．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

〔解答例〕




$n$ 年後に 120 億人を突破するとして

$$60\left(1+\frac{24}{1000}\right)^n>120 \quad すなわち \quad \left(\frac{2^{10}}{10^3}\right)^n>2$$

両辺に底が 10 の対数をとり　$\log_{10}\left(\frac{2^{10}}{10^3}\right)^n>\log_{10}2$

これより　$n(10\log_{10}2-3)>\log_{10}2$

$\log_{10}2=0.3010$　とするので　$n(10\times 0.3010-3)>0.3010$　であるから　$0.01n>0.3010$

すなわち　$n>30.1$

これを満たす最小の自然数 $n$ は　$n=31$

よって，60 億人の人口が 2 倍の 120 億人を突破するのは **31 年後**

**3.** $\log_x y + 2\log_y x \leqq 3$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域を図示せよ．

〔 解答例 〕

底の条件，真数条件から　$0 < x < 1,\ 1 < x,\ 0 < y < 1,\ 1 < y$

このもとで 底を $x$ にすると

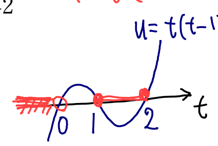
$$\log_x y + \frac{2}{\log_x y} \leqq 3$$

$t = \log_x y$　……①　　← y≠0 なので t≠0

とおくと　$t \neq 0$　であり　$t + \dfrac{2}{t} \leqq 3$

両辺 $t^2 (> 0)$ をかけると　$t^3 + 2t \leqq 3t^2$　　← t をかけると t<0 のとき 不等号が逆になる

整理して　$t(t-1)(t-2) \leqq 0$




すなわち　$t < 0,\ 1 \leqq t \leqq 2$

① から

$$\log_x y < \log_x 1,\ \ \log_x x \leqq \log_x y \leqq \log_x x^2$$

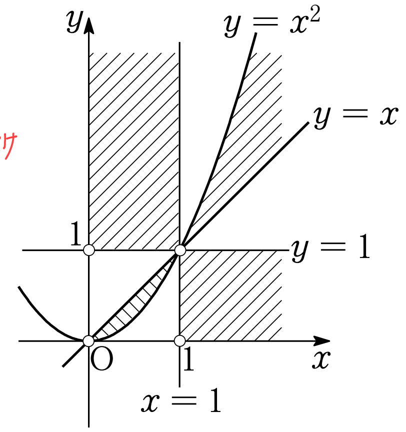
これより　　底xで場合分け

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \quad のとき \quad y > 1,\ x \geqq y \geqq x^2 \\ 1 < x \quad のとき \quad y < 1,\ x \leqq y \leqq x^2 \end{cases}$$

よって　図示すると右図斜線部．

ただし，境界線は 4 直線

$x = 0,\ \ x = 1,\ \ y = 0,\ \ y = 1$ 上はのぞく．




**4.** 不等式 $2 - \log_y (1+x) < \log_y (1-x)$ の表す領域を図示せよ．

〔 解答例 〕

底の条件より　$0 < y < 1,\ \ 1 < y$　……①

真数条件より　$\begin{cases} 1 + x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$　　すなわち　$-1 < x < 1$　……②

① ，② のもとで　　↙ 底yで場合分け

$$\log_y y^2 < \log_y (1-x)(1+x)\ \ すなわち\ \ \begin{cases} y > 1 \ のとき & y^2 < 1 - x^2 \\ 0 < y < 1 \ のとき & y^2 > 1 - x^2 \end{cases}$$

ゆえに　$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \quad (y > 1) \\ x^2 + y^2 > 1 \quad (0 < y < 1) \end{cases}$

よって　図示すると右図斜線部（境界線含まず）