追加問題　二学期第３講　解答例

1.　次の方程式，不等式を解け．

(1)　$(4\sqrt{2})^x = \dfrac{1}{32}$

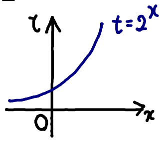
(2)　$2^x - 16 \cdot 2^{-x} - 15 = 0$

(3)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x - \dfrac{1}{3^x} - 6 > 0$

〔解答例〕

(1)　$2^{\frac{5}{2}x} = 2^{-5}$　すなわち　$\dfrac{5}{2}x = -5$　　$\therefore \boldsymbol{x = -2}$

(2)　$t = 2^x$　……①



とおくと　$t > 0$

$t - \dfrac{16}{t} - 15 = 0$

両辺に t をかけて　$t^2 - 15t - 16 = 0$　すなわち　$(t+1)(t-16) = 0$

よって　$t = 16$　であるから ① より　$\boldsymbol{x = 4}$　　← $2^x = 16$

(3)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = t$　……②

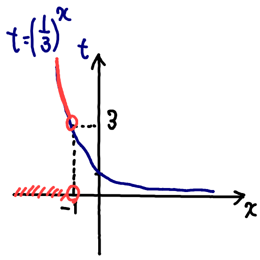
とおくと　$t > 0$

$t^2 - t - 6 > 0$　すなわち　$(t-3)(t+2) > 0$

これより　$3 < t$

② から　$3 < \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　となり　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

よって，底が $\dfrac{1}{3}$ であるから　$\boldsymbol{x < -1}$



2.　次の方程式を解け．

$\log_4(4x-7) + \log_2 x = 1 + 3\log_4(x-1)$

〔解答例〕

真数条件より

$$\begin{cases} 4x - 7 > 0 \\ x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \qquad \therefore x > \frac{7}{4} \quad \cdots\cdots①$$

不等式は

$$\frac{\log_2(4x-7)}{\log_2 4} + \log_2 x = 1 + 3 \cdot \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}$$

← 底を２に統一
$\log_2 4 = 2$

両辺に 2 をかけて　$\log_2(4x-7) + 2\log_2 x = 2 + 3\log_2(x-1)$

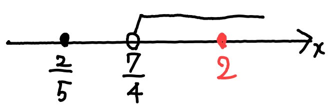
変形して　$\log_2(4x-7) + \log_2 x^2 = \log_2 4 + \log_2(x-1)^3$　　$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

これより　$\log_2\{(4x-7)x^2\} = \log_2\{4(x-1)^3\}$　　真数が同じ

すなわち　$(4x-7)x^2 = 4(x-1)^3$

展開して　$4x^3 - 7x^2 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$　すなわち　$5x^2 - 12x + 4 = 0$

因数分解して　$(5x-2)(x-2) = 0$　　$\therefore x = \dfrac{2}{5},\ 2$　……②



よって ①，② より　$\boldsymbol{x = 2}$

3.　次の不等式を解け．

(1)　$\log_3(x+2)+\log_3(x-2)<2$

(2)　$(\log_3 3x)(\log_3 9x)<2$

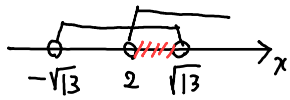
〔解答例〕

(1)　真数条件より $x+2>0$ かつ $x-2>0$　$\therefore x>2$ ……①

① のもとで　$\log_3(x+2)(x-2)<\log_3 9$　であるから　$(x+2)(x-2)<9$

すなわち　$x^2<13$　であり　$-\sqrt{13}<x<\sqrt{13}$　……②

よって，①，② から　$\boldsymbol{2<x<\sqrt{13}}$



(2)　真数条件より $3x>0$ かつ $9x>0$　$\therefore x>0$ ……③

③ のもとで　$(\log_3 3x)(\log_3 9x)<2$　より　$(\log_3 x+1)(\log_3 x+2)<2$

← $\log_3 3x=\underbrace{\log_3 3}_{=1}+\log_3 x$

これより　$(\log_3 x)^2+3(\log_3 x)<0$　となるので　$(\log_3 x)(\log_3 x+3)<0$

$\log_3 9x=\underbrace{\log_3 9}_{=2}+\log_3 x$

すなわち　$-3<\log_3 x<0$　であり　$\log_3\dfrac{1}{27}<\log_3 x<\log_3 1$

よって，底が 3 であるから　$\boldsymbol{\dfrac{1}{27}<x<1}$

これは ③ を満たす．

4.　a，b を正の実数とする．連立方程式

$$(*)\quad \begin{cases} x\sqrt{y^3}=a \\ \sqrt[3]{x}\,y=b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x，y について考えよう．

(1)　連立方程式 (∗) を満たす正の実数 x，y は

$$x=a^{\boxed{\text{ス}}}b^{\boxed{\text{セソ}}},\quad y=a^p b^{\boxed{\text{タ}}}$$

となる．ただし

$$p=\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である．

(2)　$b=2\sqrt[3]{a^4}$ とする．a が $a>0$ の範囲を動くとき，連立方程式 (∗) を満たす正の実数 x，y について，$x+y$ の最小値を求めよう．

$b=2\sqrt[3]{a^4}$ であるから，(∗) を満たす正の実数 x，y は，a を用いて

$$x=2^{\boxed{\text{セソ}}}a^{\boxed{\text{トナ}}},\qquad y=2^{\boxed{\text{タ}}}a^{\boxed{\text{ニ}}}$$

と表される．したがって，相加相乗平均の関係を利用すると，$x+y$ は $a=2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ をとることがわかる．ただし

$$q=\frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である．

〔解答例〕

$$\begin{cases} x\sqrt{y^3} = a & \cdots\cdots ① \\ \sqrt[3]{x}\, y = b & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

とおく．

(1)　① の両辺 2 乗して　$x^2y^3 = a^2$　$\cdots\cdots ①'$

② の両辺 3 乗して　$xy^3 = b^3$　$\cdots\cdots ②'$

$\dfrac{①'}{②'}$ として　$x = \dfrac{a^2}{b^3} = \boxed{\boldsymbol{a^2b^{-3}}}_{\text{スセソ}}$　$\leftarrow \dfrac{x^2y^3}{xy^3} = \dfrac{a^2}{b^3}$

これを ②′ に代入して　$\dfrac{a^2}{b^3}y^3 = b^3$ となり　$y^3 = a^{-2}b^6$　$\downarrow \frac{1}{3}$乗

これより　$y = \boxed{\boldsymbol{a^{-\frac{2}{3}}b^2}}_{\text{タチツテ}}$　$p = \boxed{\dfrac{\boldsymbol{-2}}{\boldsymbol{3}}}_{\text{チツテ}}$

(2)　$b = 2\sqrt[3]{a^4} = 2a^{\frac{4}{3}}$ とすると，(1) より

$x = a^2(2a^{\frac{4}{3}})^{-3} = 2^{-3}a^2a^{-4} = \boxed{\boldsymbol{2^{-3}a^{-2}}}_{\text{トナ}} = \dfrac{1}{8a^2}$

$y = a^{-\frac{2}{3}}(2a^{\frac{4}{3}})^2 = 2^2a^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{8}{3}} = \boxed{\boldsymbol{2^2a^2}}_{\text{ニ}} = 4a^2$

$x > 0$，$y > 0$ より相加相乗平均の関係を利用すると

$$x + y \geqq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{\frac{1}{8a^2}\cdot 4a^2} = \sqrt{2}$$

$\frac{1}{4}$乗

等号成立は $x = y$　つまり　$\dfrac{1}{8a^2} = 4a^2$　であり　$a^4 = \dfrac{1}{32} = 2^{-5}$　$\therefore a = 2^{-\frac{5}{4}}$

よって　$x + y$ は $a = \boxed{\boldsymbol{2^{-\frac{5}{4}}}}_{\text{ネノハ}}$ のとき最小値 $\boxed{\boldsymbol{\sqrt{2}}}_{\text{ヌ}}$ をとる．

$q = \boxed{\dfrac{\boldsymbol{-5}}{\boldsymbol{4}}}_{\text{ネノハ}}$