追加問題　二学期第２講 解答例

1.　$(x+1)^{10}$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ．

〔解答例〕

← a, b を求める

$(x+1)^{10}$ を x^2-1 で割った余りを $ax+b$，商を $Q(x)$ とすると

$$(x+1)^{10}=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$ ← x の恒等式

$x=-1,\ 1$ をそれぞれ代入して

$$\begin{cases} 0=-a+b \\ 2^{10}=a+b \end{cases} \qquad \therefore\ a=512,\ b=512$$ ← $2^{10}=1024$

よって，求める余りは **$512x+512$**

2.　関数 $f(x)=x^2+\dfrac{3}{x^2+1}$ の最小値を求めよ．

〔解答例〕

← 積が定数に！

$$\begin{aligned} f(x)=x^2+\frac{3}{x^2+1}&=x^2+1+\frac{3}{x^2+1}-1 \\ &\geqq 2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{3}{x^2+1}}-1 \\ &=2\sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

（$\because$ $x^2+1>0$，$\dfrac{3}{x^2+1}>0$ より
相加相乗平均の大小関係）

等号成立は

$$x^2+1=\frac{3}{x^2+1} \quad \text{であり} \quad (x^2+1)^2=3 \quad \text{すなわち} \quad x=\pm\sqrt{\sqrt{3}-1}$$

よって　最小値 $\mathbf{2\sqrt{3}-1}$ $\left(x=\pm\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)$

3.　次の問いに答えよ．

(1)　4 次方程式 $x^4+7x^3+14x^2+7x+1=0$ を解け．

(2)　5 次方程式 $x^5+8x^4+21x^3+21x^2+8x+1=0$ を解け．

〔解答例〕

(1)　$x=0$ とすると $1=0$ となり不適であるから　$x\neq 0$

両辺を x^2 で割って

$$x^2+7x+14+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

← 4次の相反方程式
$x+\frac{1}{x}$ のかたまりを作る

変形して $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+12=0$

因数分解をして $\left(x+\dfrac{1}{x}+4\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+3\right)=0$　$2\times x\cdot x$

すなわち　$(x^2+4x+1)(x^2+3x+1)=0$

(2) は 5次の相反方程式
一般に奇数次の相反方程式は $x=-1$ を
必ず解にもつ

よって　$\boldsymbol{x=-2\pm\sqrt{3},\ \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}}$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 8 & 21 & 21 & 8 & 1 \\ & & -1 & -7 & -14 & -7 & -1 \\ \hline & 1 & 7 & 14 & 7 & 1 & 0 \end{array}$$

(2)　$(x+1)(x^4+7x^3+14x^2+7x+1)=0$

よって　$\boldsymbol{x=-1,\ 2\pm\sqrt{3},\ \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}}$

4.　x の整式 $f(x)$ を $(x-1)^3$ で割ったときの余りが x^2+3x+5 のとき，$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

〔解答例〕

商を $Q(x)$ として

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^3Q(x)+x^2+3x+5 \\ &= (x-1)^3Q(x)+(x-1)^2+5x+4 \\ &= (x-1)^2\{(x-1)Q(x)+1\}+5x+4 \end{aligned}$$

余り

← $f(x)=(x-1)^2\square+\boxed{}$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{5x+4}$

5.　整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは $4x-5$，$x+2$ で割ったときの余りは -4 である．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．

〔解答例〕

商を $Q_1(x)$ として

$$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+4x-5 \quad \cdots\cdots ①$$

① で $x=1$ として　$P(1)=(1-1)Q_1(1)+4\cdot 1-5=-1$

剰余の定理から　$P(-2)=-4$

(1)　$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは　$P(1)=\boldsymbol{-1}$

(2)　$Q_1(x)$ を $x+2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを r として

$$Q_1(x)=(x+2)Q(x)+r$$

余り

$P(x)=(x-1)^2(x+2)\square+\boxed{}$

と表せる．これを ① へ代入して

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2\{(x+2)Q(x)+r\}+4x-5 \\ &= (x-1)^2(x+2)Q(x)+r(x-1)^2+4x-5 \quad \cdots\cdots ①' \end{aligned}$$

これより　$P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りは　$r(x-1)^2+4x-5$　……☆

①′ で $x=-2$ として　$P(-2)=9r-8-5=-4$　　$\therefore r=1$

よって ☆ より求める余りは　$(x-1)^2+4x-5=\boldsymbol{x^2+2x-4}$