追加問題　二学期第１講　解答例

1.　$2x+y+z=1$，$3x+2y+z=0$ を満たす x, y, z の任意の値に対して恒等的に $a(x-3)^2+b(y-2)^2+c(z-1)^2=72$ が成り立つような定数 a，b，c の値を求めよ．

〔解答例〕

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 & \cdots\cdots① \\ 3x+2y+z=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおく．

②－① として　$x+y=-1$　すなわち　$y=-x-1$　……③

③ を ① へ代入して　$2x+(-x-1)+z=1$　すなわち　$z=-x+2$　……④

y, zをxで表した

③，④ を　$a(x-3)^2+b(y-2)^2+c(z-1)^2=72$　へ代入して

$$a(x-3)^2+b(-x-3)^2+c(-x+1)^2=72$$

← xだけの式にした

整理して　$(a+b+c)x^2+2(-3a+3b-c)x+9a+9b+c=72$

これが x の恒等式となるので

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \cdots\cdots⑤ \\ -3a+3b-c=0 & \cdots\cdots⑥ \\ 9a+9b+c=72 & \cdots\cdots⑦ \end{cases}$$

⑤＋⑥ として　$-2a+4b=0$　すなわち　$a=2b$　……⑧

⑦－⑤ として　$8a+8b=72$　すなわち　$a+b=9$　……⑨

⑧ を ⑨ へ代入して　$3b=9$　　$\therefore b=3$

⑧ より　$a=6$

⑤ から　$c=-9$

よって　$\boldsymbol{a=6,\ b=3,\ c=-9}$

2.　$x=5+3i$ とするとき，$2x^5-20x^4+68x^3-x^2+10x-83$ の値は $\boxed{}$ である．ただし，i は虚数単位とする．

〔2009　早大 人間科学部〕

〔解答例〕

$x=5+3i$ より　$x-5=3i$

両辺２乗すると

$(x-5)^2=(3i)^2$　となり　$x^2-10x+25=-9$　すなわち　$x^2-10x+34=0$　……①

これより

$$2x^5-20x^4+68x^3-x^2+10x-83=(x^2-10x+34)(2x^3-1)-49$$

$$=\boxed{\mathbf{-49}}\quad(\because ①)$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 \qquad\qquad -1 \\ x^2-10x+34\,\big)\,\overline{2x^5-20x^4+68x^3-x^2+10x-83} \\ \underline{2x^5-20x^4+68x^3\qquad\qquad\qquad} \\ -x^2+10x-83 \\ \underline{-x^2+10x-34} \\ -49 \end{array}$$

3.　a は正の無理数で，$X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$，$Y = a^2 - 2a$ を考えると，X と Y はともに有理数である．以下の問に答えよ．

(1)　整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ．

(2)　X と Y の値を求めよ．

(3)　a の値を求めよ．ただし，素数の平方根は無理数であることを用いてよい．

〔2011　神大 理系 前期〕

〔解答例〕

(1)

$$
\begin{array}{rl}
 & x + 5 \\
x^2 - 2x \,\big) & x^3 + 3x^2 - 14x + 6 \\
 & x^3 - 2x^2 \\ \hline
 & \quad 5x^2 - 14x + 6 \\
 & \quad 5x^2 - 10x \\ \hline
 & \qquad -4x + 6
\end{array}
$$

よって　商は $\boldsymbol{x + 5}$，余りは $\boldsymbol{-4x + 6}$

(2)　(1) より

$$
\begin{array}{rl}
 & a + 5 \\
a^2 - 2a \,\big) & a^3 + 3a^2 - 14a + 6 \\
 & a^3 - 2a^2 \\ \hline
 & \quad 5a^2 - 14a + 6 \\
 & \quad 5a^2 - 10a \\ \hline
 & \qquad -4a + 6
\end{array}
$$

$X = Y(a + 5) - 4a + 6$　すなわち　$(Y - 4)a + 5Y - X + 6 = 0$

$Y - 4$，$5Y - X + 6$ はともに有理数，a は無理数であるから

$$\begin{cases} Y - 4 = 0 \\ 5Y - X + 6 = 0 \end{cases}$$

よって　$\boldsymbol{X = 26,\ Y = 4}$

p, q が有理数
α が無理数
のとき
$p\alpha + q = 0$
ならば
$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$

(3)　(2) より

$$\begin{cases} a^3 + 3a^2 - 14a + 6 = 26 & \cdots\cdots ① \\ a^2 - 2a = 4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② は $a^2 - 2a - 4 = 0$　$\therefore a = 1 \pm \sqrt{5}$

① は $a^3 + 3a^2 - 14a - 20 = 0$　すなわち　$(a + 5)(a^2 - 2a - 4) = 0$

$\therefore a = -5,\ 1 \pm \sqrt{5}$

よって，a は ① かつ ② をみたす正の無理数で $\sqrt{5}$ は無理数なので $\boldsymbol{a = 1 + \sqrt{5}}$