

半径1の円に外接する△ABCについて、 $\angle CAB = 2x$, $\angle ABC = 2y$, $\angle BCA = 2z$ とする。△ABCの面積をSとするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2) $z = \frac{\pi}{6}$ のとき、Sの最小値とそのときのx, yを求めよ。

[2017 熊本大 医学部 前期]

[解答例]

(1) 円の中心をOとし、

辺BC, CA, ABと円との接点をそれぞれD, E, Fとする。

$\triangle AOE \equiv \triangle AOF$, $\triangle BOD \equiv \triangle BOF$,

$\triangle COD \equiv \triangle COE$ より

$\angle OAE = \angle OAF = x$

$\angle OBD = \angle OBF = y$

$\angle OCD = \angle OCE = z$

$AE = AF = \frac{1}{\tan x}$, $BD = BF = \frac{1}{\tan y}$, $CD = CE = \frac{1}{\tan z}$

$S = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$ ← 3つの三角形の和にする

$= \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$ ← 底辺をAB, BC, CAとみると高さはすべて1

$= \frac{1}{2}(AF + BF + BD + CD + CE + AE)$

$= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$

よって示された。

(2) $z = \frac{\pi}{6}$ のとき

三角形の内角の和より $2x + 2y + \frac{\pi}{3} = \pi$ であるから $y = \frac{\pi}{3} - x$ ……①

このとき $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $0 < y < \frac{\pi}{3}$

$\tan z = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

①より $\tan y = \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan x} = \frac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3} \tan x}$

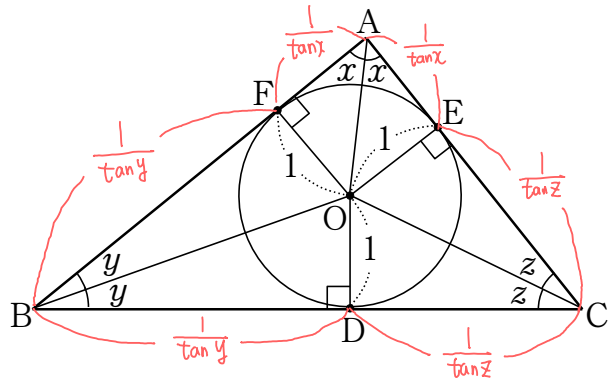
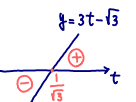
$t = \tan x$ ……②

とおくと $0 < t < \sqrt{3}$ ← $0 < x < \frac{\pi}{3}$

$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{3}t + 1}{\sqrt{3} - t} + \sqrt{3}$ ← tの1変数関数

$S = f(t)$ ($0 < t < \sqrt{3}$) とおくと

$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - t) - (\sqrt{3}t + 1)(-1)}{(\sqrt{3} - t)^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{4}{(\sqrt{3} - t)^2}$
 $= \frac{4t^2 - (\sqrt{3} - t)^2}{t^2(\sqrt{3} - t)^2} = \frac{(3t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})}{t^2(\sqrt{3} - t)^2}$



t	(0)	\dots	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	\dots	$(\sqrt{3})$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		\searrow	最小	\nearrow	

増減表より $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(t)$ の最小値 $3\sqrt{3}$

このとき ② から $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore x = \frac{\pi}{6}$

① から $y = \frac{\pi}{6}$

よって S の 最小値 $3\sqrt{3}$ ($x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{6}$)

← $\triangle ABC$ が 正三角形 のとき S は 最小値 と なる