三角形 ABC があり，AB $=2$，$\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle \mathrm{CAB}>\dfrac{\pi}{4}$ とする．点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし，$\angle \mathrm{CAH}=\alpha$ とする．辺 AB の中点を M とする．線分 AM 上に A と異なる点 X をとる．3 点 A，X，H を通る円の中心を P，半径を r，$\angle \mathrm{PAH}=\theta$ とする．この円と直線 AC との交点で，A と異なる点を Y とする．次の問に答えよ．

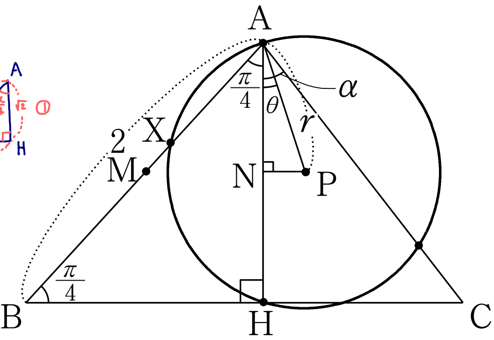
(1)　$\cos\theta$ を r を用いて表せ．

(2)　AX + AY を r と α を用いて表せ．

(3)　X のとり方によらず，AX + AY が常に一定の値になるときの α の値を求めよ．

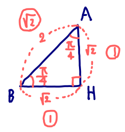
〔2003　神大 理系 前期〕

〔解答例〕



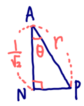
(1)　△ABH は直角二等辺三角形で AB $=2$ より

$$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=\sqrt{2}$$



線分 AH の中点を N とすると

$$\mathrm{AN}=\frac{1}{2}\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{AP}=r$$



よって　$\boldsymbol{\cos\theta}=\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}\,r}}$

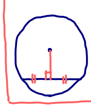
$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{2r^2}}=\frac{\sqrt{2r^2-1}}{\sqrt{2}\,r}$$

← sinθ も求めておく

AX, AY をそれぞれ求めてたす

右の㊧を考えるとよい

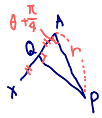
要

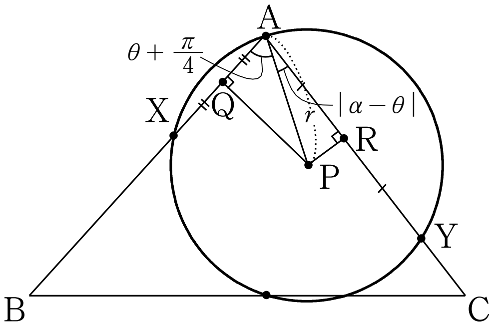


中心から弦へ垂線を下ろすと二等分する!

(2)　線分 AX，AY の中点をそれぞれ Q，R とすると

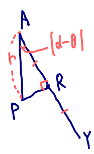
$\angle \mathrm{PAQ}=\theta+\dfrac{\pi}{4}$，$\angle \mathrm{PAR}=|\alpha-\theta|$





$$\begin{aligned}
\mathrm{AX}&=2\mathrm{AQ}\\
&=2r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\
&=2r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&=2r\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2r^2-1}}{\sqrt{2}\,r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&=1-\sqrt{2r^2-1}
\end{aligned}$$

⤵加法定理



$$\begin{aligned}
\mathrm{AY}&=2\mathrm{AR}\\
&=2r\cos(\alpha-\theta)\\
&=2r(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)\\
&=2r\left(\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\,r}+\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2r^2-1}}{\sqrt{2}\,r}\right)\\
&=\sqrt{2}\cos\alpha+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2r^2-1}\,\sin\alpha
\end{aligned}$$

⤵加法定理

← cos(θ−α) としても同様

よって　$\boldsymbol{\mathrm{AX}+\mathrm{AY}=1+\sqrt{2}\,\cos\alpha+\sqrt{2r^2-1}\left(\sqrt{2}\,\sin\alpha-1\right)}$

(3)　X のとり方によらず，AX + AY が常に一定の値になるのは AX + AY が r の値によらず一定になるときより

X のとり方で r の値が変わる!

$\sqrt{2r^2-1}$ が変わるので　2 sinα−1=0 とする

$$\sqrt{2}\sin\alpha-1=0\quad \text{すなわち}\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \therefore\ \alpha=\frac{\pi}{4}$$

このとき　AX + AY $=2$　となり，X のとり方によらず常に一定である．

よって　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{\pi}{4}}$

$\mathrm{AX}+\mathrm{AY}=1+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{2r^2-1}\underbrace{\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}-1\right)}_{0}$

$=1+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+0$