

n を 2 以上の整数とする. 2 個のさいころを同時に投げるとき, 出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする. 以下の間に答えよ.

- (1) P_2, P_3, P_4 を求めよ.
 (2) $n \geq 36$ のとき, P_n を求めよ.
 (3) $P_n = \frac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ.

[2019 神大 理系 前期]

[解答例]

同時に投げる 2 個のサイコロの目を a, b とすると組 (a, b) の決め方は 36 (通り)

出た目の積 ab を n で割ったときの余りが 1 となる条件は $ab - 1$ が n の倍数になることである.

$ab - 1$ の値は次のような 36 (通り) になる.

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	3	5	7	9	11
3	2	5	8	11	14	17
4	3	7	11	15	19	23
5	4	9	14	19	24	29
6	5	11	17	23	29	35

← 余り! よりも n の倍数の方を気にせよ!
 商を q とし
 $ab = nq + 1$
 $\leftrightarrow ab - 1 = nq$
 $ab - 1$ は n の倍数となり
 n は $ab - 1$ の約数になる! ← (3) に使う!

← 36 (通り) 以内なので
書き出すとよい

- (1) $ab - 1$ が 2 の倍数になるのは $ab - 1 = 0, 2, 4, 8, 14, 24$ であるから,
 組 (a, b) は 9 (通り) ← $(a, b) = (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)$

← ab が奇数
つまり a と b がともに奇数の確率

よって $P_2 = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$ab - 1$ が 3 の倍数になるのは $ab - 1 = 0, 3, 9, 15, 24$ であるから,

組 (a, b) は 8 (通り) ← $(a, b) = (1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (4, 1), (4, 4), (5, 2), (5, 5)$

よって $P_3 = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$ab - 1$ が 4 の倍数になるのは $ab - 1 = 0, 4, 8, 24$ であるから,

組 (a, b) は 5 (通り) ← $(a, b) = (1, 1), (1, 5), (3, 3), (5, 1), (5, 5)$

よって $P_4 = \frac{5}{36}$

- (2) $n \geq 36$ のとき, $ab - 1$ が n の倍数になるのは $ab - 1 = 0$ のみであるから
 組 (a, b) は 1 (通り)

$0 \leq ab - 1 \leq 35$

よって $P_n = \frac{1}{36} (n \geq 36)$

- (3) (1), (2) より $n = 2, 3, 4, n \geq 36$ ならば $P_n \neq \frac{1}{18}$

$P_n = \frac{1}{18}$ となる n は $5 \leq n \leq 35$ を満たす.

$P_n = \frac{1}{18} = \frac{2}{36}$ であるから, 求める n は $ab - 1$ が n の倍数になる組 (a, b) がちょうど 2 (通り) になる n である.

$(a, b) = (1, 1), (n, n)$ の 2 (通り) のみとなる

$(a, b) = (1, 1)$ ならば $ab - 1 = 0$ は必ず n の倍数になるから, 上の表で $ab - 1$ が 0 以外の n の倍数となる数が 1 つだけ出てくるものを考える.

← (例) n が 8 とすると $(a, b) = (3, 4), (4, 3)$ のように 2 (通り) 出さしまう

$a \neq b$ とすると (a, b) は $(1, 1)$ 以外で 2 (通り) 出てくるので不適である.

$a = b$ とすると $ab - 1 = a^2 - 1$ が n の倍数になる組 (a, b) が $(1, 1)$ 以外の 1(通り) だけになることを考えると

$(a, b) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ の場合に (ほら)

$a^2 - 1$ の値が $3^2 - 1 = 8, 4^2 - 1 = 15, 5^2 - 1 = 24, 6^2 - 1 = 35$ の約数になることが必要で $n = 5, 6, 7, 8, 12, 15, 24, 35$

$\leftarrow n$ は $a^2 - 1$ の約数で $5 \leq n \leq 35$

これらの n の倍数で $ab - 1$ の値が 0 以外のひとつだけになるものは $n = 6, 12, 15, 24, 35$

よって $P_n = \frac{1}{18}$ となる n は $n = 6, 12, 15, 24, 35$

\leftarrow みつけたもん勝ち!?

補

$$n = 6 \text{ のとき } ab - 1 = 0, 24$$

$$(a, b) = (1, 1), (5, 5)$$

$$n = 5 \text{ のとき } ab - 1 = 0, 15, 35$$

$$(a, b) = (1, 1), (4, 4), (6, 6)$$

より不適

$$n = 12 \text{ のとき } ab - 1 = 0, 24$$

$$(a, b) = (1, 1), (5, 5)$$

$$n = 15 \text{ のとき } ab - 1 = 0, 15$$

$$(a, b) = (1, 1), (4, 4)$$

$$n = 24 \text{ のとき } ab - 1 = 0, 24$$

$$(a, b) = (1, 1), (5, 5)$$

$$n = 35 \text{ のとき } ab - 1 = 0, 35$$

$$(a, b) = (1, 1), (6, 6)$$