n を自然数とする．$A_n = 2^n + n^2$，$B_n = 3^n + n^3$ とおく．A_n を 3 で割った余りを a_n とし，B_n を 4 で割った余りを b_n とする．以下の問に答えよ．

(1)　$A_{n+6} - A_n$ は 3 で割り切れることを示せ．

(2)　$1 \leqq n \leqq 2018$ かつ $a_n = 1$ を満たす n の個数を求めよ．

(3)　$1 \leqq n \leqq 2018$ かつ $b_n = 2$ を満たす n の個数を求めよ．

〔2018　神大 理系 後期〕

〔解答例〕

2つの整数 a, b と 2以上の整数 p について
$a-b$ が p の倍数 $\Leftrightarrow$ a と b は p で割ったときの余りが等しい

(1)
$$\begin{aligned} A_{n+6} - A_n &= \{2^{n+6} + (n+6)^2\} - (2^n + n^2) \\ &= 2^n(2^6 - 1) + 12n + 36 \\ &= 3(21 \cdot 2^n + 4n + 12) \end{aligned}$$

ここで $21 \cdot 2^n + 4n + 12$ は整数であるから $A_{n+6} - A_n$ は 3 の倍数である．

よって　$A_{n+6} - A_n$ は 3 で割り切れる．

(2)　(1) より A_{n+6} と A_n は 3 で割ったときの余りが等しいので

$$a_{n+6} = a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) からわかること
$a_1 = a_7 = a_{13} = \cdots$
$a_2 = a_8 = a_{14} = \cdots$
$\vdots$
$a_6 = a_{12} = a_{18} = \cdots = a_{2016} = 1$

a_n の値を表にすると下のようになる．

n	1	2	3	4	5	6
A_n	3	8	17	32	57	100
a_n	0	2	2	2	0	1

これより $a_n = 1$ となる n は 6 の倍数である．

$1 \leqq n \leqq 2018 (= 6 \cdot 336 + 2)$ を満たすことから

$$n = 6 (= 6 \cdot 1),\ 12,\ 18,\ \cdots,\ 2016 (= 6 \cdot 336)$$

よって，求める n の個数は **336**（個）

(3)
$$\begin{aligned} B_{n+4} - B_n &= \{3^{n+4} + (n+4)^3\} - (3^n + n^3) \\ &= 3^n(3^4 - 1) + 12n^2 + 48n + 64 \\ &= 4(20 \cdot 3^n + 3n^2 + 12n + 16) \end{aligned}$$

(1) と (2) をヒントに
周期性を考える

ここで $20 \cdot 3^n + 3n^2 + 12n + 16$ は整数であるから $B_{n+4} - B_n$ は 4 の倍数である．

これより　$B_{n+4} - B_n$ は 4 で割り切れる．

B_{n+4} と B_n は 4 で割ったときの余りが等しいので

$$b_{n+4} = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

b_n の値を表にすると下のようになる．

n	1	2	3	4
B_n	4	17	54	145
b_n	0	1	2	1

$b_3 = b_7 = b_{11} = \cdots = b_{2015} = 2$

これより $b_n = 2$ となる n は 4 で割ると余りが 3 である．

よって $1 \leqq n \leqq 2018 (= 4 \cdot 504 + 2)$ を満たすことから

$$n = 3 (= 4 \cdot 0 + 3),\ 7,\ 11,\ \cdots,\ 2015 (= 4 \cdot 503 + 3)$$

よって，求める n の個数は **504**（個）

〔補足〕((3) の考察)

3^n を 4 で割った余りについて

二項定理

$$
\begin{aligned}
3^n = (4-1)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 4^n + {}_n\mathrm{C}_1 4^{n-1}(-1) + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} 4(-1)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n(-1)^n \\
&= (4\text{ の倍数}) + (-1)^n \\
&= \begin{cases} 4\text{ で割った余り } 3 & (n\text{ が奇数}) \\ 4\text{ で割った余り } 1 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

n^3 を 4 で割った余りについて

あ n が偶数のとき n^3 は 8 の倍数になるので n^3 を 4 で割った余りは 0

い n が奇数のとき n は 4 で割って余りが 1 または 3 であるから，

ある整数 k が存在して $n = 4k \pm 1$ とおける

$$
\begin{aligned}
n^3 = (4k \pm 1)^3 &= 64k^3 \pm 48k^2 + 12k \pm 1 \\
&= (4\text{ の倍数}) \pm 1\ (\text{複号同順}) \\
&= \begin{cases} 4\text{ で割った余り } 1 & (n\text{ が } 4\text{ で割って余り } 1) \\ 4\text{ で割った余り } 3 & (n\text{ が } 4\text{ で割って余り } 3) \end{cases}
\end{aligned}
$$

これらをふまえ，4 で割った余りは下の表のようになる．

n	1	2	3	4	5	6	7	8
3^n	3	1	3	1	3	1	3	1
n^3	1	0	3	0	1	0	3	0
b_n	0	1	2	1	0	1	2	1

これより $b_{n+4} = b_n$ が成り立つことがみえる．

〔補足〕(合同式を使う)

い $n \equiv 1 \pmod 4$ ならば $n^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod 4$

$n \equiv -1 \pmod 4$ ならば $n^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod 4$