

$i = \sqrt{-1}$ とする。以下の間に答えよ。

(1) 実数 α, β について,

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して,

$$z = \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$$

とおくとき, 等式

$$z \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z$$

が成り立つことを示せ。

(3) 2 以上の自然数 n について, 等式

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$$

が成り立つことを示せ。

[2011 神大 理系 前期]