追加問題「微分法と積分法 ②」解答例

xで積分する!　x: 0→1

**1.**　0 以上の実数 $t$ に対し，$F(t)=\int_0^1 |x^2-t^2|\,dx$ とする．次の問いに答えよ．

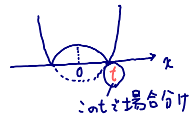
(1)　$F(t)$ を $t$ を用いて表せ．

(2)　$t \geqq 0$ において，関数 $F(t)$ が最小値をとるときの $t$ の値を求めよ．

〔2012　大阪市大 文系 前期〕

〔解答例〕

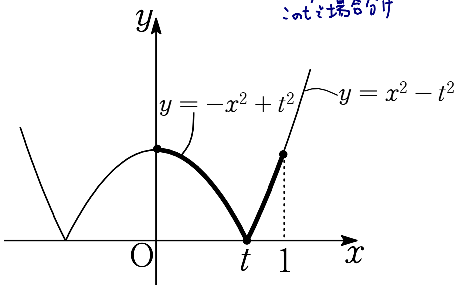
← y=|x²−t²| のグラフをイメージ




(1)　$|x^2-t^2|=\begin{cases} x \leqq -t,\ t \leqq x \text{ のとき} & x^2-t^2 \\ -t \leqq x \leqq t \text{ のとき} & -(x^2-t^2)=-x^2+t^2 \end{cases}$

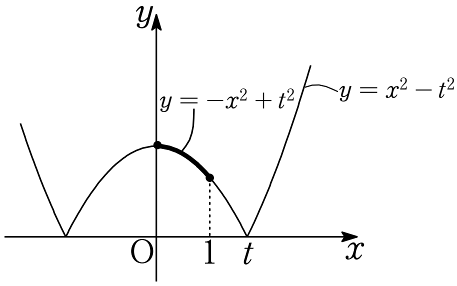
あ　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t (-x^2+t^2)\,dx+\int_t^1 (x^2-t^2)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+t^2x\right]_0^t+\left[\frac{x^3}{3}-t^2x\right]_t^1 \\ &= -\frac{t^3}{3}+t^3+\frac{1}{3}-t^2-\frac{t^3}{3}+t^3 \\ &= \frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3} \end{aligned}$$




い　$t>1$ のとき

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^1 (-x^2+t^2)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+t^2x\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3}+t^2 \end{aligned}$$




よって あ，い より

$$F(t)=\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3}} & \boldsymbol{(0 \leqq t \leqq 1)} \\ \boldsymbol{t^2-\dfrac{1}{3}} & \boldsymbol{(t>1)} \end{cases}$$

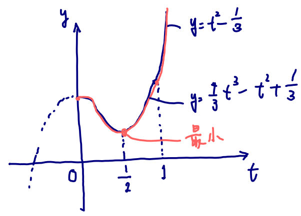
← tの3次関数

← tの2次関数

(2)　$F'(t)=\begin{cases} 0<t<1 \text{ のとき} & 4t^2-2t=2t(2t-1) \\ t>1 \text{ のとき} & 2t \end{cases}$

$F(t)$ の増減表は下のようになる．

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ |
| $F(t)$ | $\frac{1}{3}$ | ↘ | $\frac{1}{4}$ | ↗ | $\frac{2}{3}$ | ↗ |




よって　$F(t)$ を最小にする $t$ は　$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$

**2.** 座標平面上の放物線 $y=-x^2+2$ を $C_1$ とし，$0<t<\sqrt{2}$ に対して，$C_1$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\,-t^2+2)$ をとる．点 P を通り $x$ 軸に平行な直線を $\ell$ とする．また，点 P を通り，$y$ 軸を軸とし原点を頂点とする放物線を $C_2$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 放物線 $C_2$ の方程式を求めよ．

(2) 放物線 $C_2$ と直線 $\ell$ で囲まれた部分の面積 $S_2(t)$ を $t$ を用いて表せ．

(3) 関数 $S_2(t)$ の $0<t<\sqrt{2}$ における最大値とそのときの $t$ を求めよ．

(4) 放物線 $C_1$ と直線 $\ell$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とするとき，$S_1(t)=S_2(t)$ となる $t$ を求めよ．

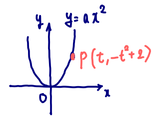
〔2016 香川大 前期〕

〔解答例〕

(1) 放物線 $C_2$ は $y$ 軸を軸とし原点を頂点とするので，$a$ を 0 でない実数として

$$C_2 : y=ax^2$$

← $a$をtで表そう




とおける．

これが点 $\mathrm{P}(t,\,-t^2+2)$ を通るので $-t^2+2=at^2$

$t \neq 0$ より $a=\dfrac{-t^2+2}{t^2}$

よって，$C_2$ の方程式は $\boldsymbol{y=\dfrac{-t^2+2}{t^2}x^2}$

(2) $\ell$ は点 P を通り，$x$ 軸に平行な直線なので $\ell : y=-t^2+2$

$C_2$ は $y$ 軸対称なので，$C_2$ と $\ell$ の交点の $x$ 座標は $-t$，$t$ である．

$$S_2(t)=\int_{-t}^{t}\left\{(-t^2+2)-\frac{-t^2+2}{t^2}x^2\right\}dx$$

$$=-\frac{-t^2+2}{t^2}\int_{-t}^{t}(x+t)(x-t)\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

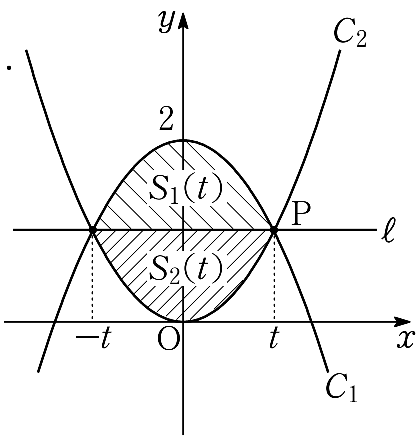
$$=\frac{-t^2+2}{t^2}\cdot\frac{1}{6}\{t-(-t)\}^3$$

↓ $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$$=\frac{4}{3}t(-t^2+2)$$

$$=\boldsymbol{-\frac{4}{3}t^3+\frac{8}{3}t}$$

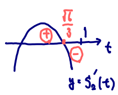
← tの3次関数




(3) $S_2'(t)=-4t^2+\dfrac{8}{3}=-4\left(t^2-\dfrac{2}{3}\right)$

$S_2'(t)=0$ とすると $0<t<\sqrt{2}$ より

$$t=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$




| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ | $\cdots$ | $(\sqrt{2})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_2'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S_2(t)$ | | ↗ | $\dfrac{16}{27}\sqrt{6}$ | ↘ | |

よって，右の増減表より $S_2(t)$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{16}{27}\sqrt{6}\ \left(t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)}$

(4) $S_1(t)=\displaystyle\int_{-t}^{t}\{-x^2+2-(-t^2+2)\}\,dx$

$$=-\int_{-t}^{t}(x+t)(x-t)\,dx \quad \cdots\cdots ②$$

← ①と②は $-\int_{-t}^{t}(x+t)(x-t)dt$ が共通

$S_1(t)=S_2(t)$ となるのは，①＝② として $\dfrac{-t^2+2}{t^2}=1$

すなわち $t^2=1$

よって $0<t<\sqrt{2}$ であるから $\boldsymbol{t=1}$