追加問題「微分法と積分法 ①」解答例

**1.**　2 曲線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = -x^2 + 4x - 4$ の 2 つの曲線の両方に接する直線の方程式を求めよ．

〔解答例〕

$y' = 2x$ より $y = 2t(x-t)+t^2$

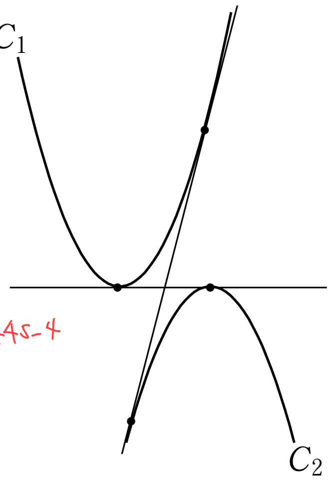
$C_1$ の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は　$y = 2tx - t^2$　……①

これと $C_2$ を連立して　$x^2 + 2(t-2)x - t^2 + 4 = 0$　← $x^2 = 2tx - t^2$ これが重解をもつ

これが重解をもつので，判別式を $D$ として

$$\frac{D}{4} = (t-2)^2 + t^2 - 4 = 2t(t-2) = 0 \qquad \therefore t = 0,\ 2$$

よって ① から　$\boldsymbol{y = 0,\ y = 4x - 4}$




〔別解例 1〕(① から)

$y' = -2x + 4$ より $y = (-2s+4)(x-s) - s^2 + 4s - 4$

$C_2$ 上の点 $(s,\ -s^2 + 4s - 4)$ における接線の方程式は

$$y = (-2s + 4)x + s^2 - 4 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② が同じ直線になるとき　← ①,② の傾きとy切片が同じ

$$\begin{cases} 2t = -2s + 4 \\ -t^2 = s^2 - 4 \end{cases} \qquad \therefore (s,\ t) = (0,\ 2),\ (2,\ 0)$$

よって ①，② から　$\boldsymbol{y = 0,\ y = 4x - 4}$

**2.**　半径 1 の球に内接する円柱の体積の最大値を求めよ．

〔解答例〕

← 自分で変数を設定する！ 球の半径は1

円柱の高さを $2x$ とすると $0 < x < 1$

底面の半径は $\sqrt{1 - x^2}$

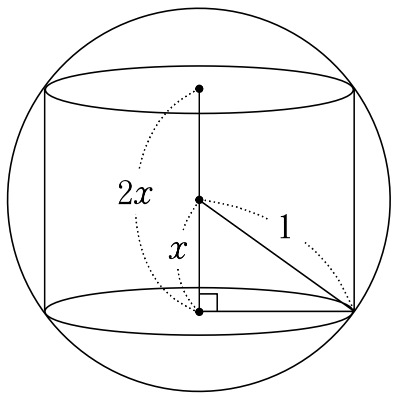
円柱の体積を $V(x)$ とすると

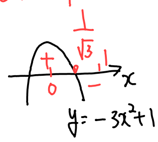
$$V(x) = \pi \cdot \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 \cdot 2x \quad ←(底面積)\times(高さ)$$

$$= \pi(1 - x^2)2x$$

$$= 2\pi(-x^3 + x) \quad ← x の 3 次関数$$

$$V'(x) = 2\pi(-3x^2 + 1)$$




増減表は次のようになる．

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ | $(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $V(x)$ | $(0)$ | ↗ | 最大 | ↘ | $(0)$ |

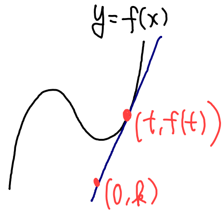
よって，最大値　$V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}}$

**3.** 関数 $f(x)=x^3+2x^2-4x$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 点 $(0,\ k)$ から曲線 $y=f(x)$ に引くことができる接線の本数を求めよ．

〔解答例〕




(1) $f'(x)=3x^2+4x-4$

接線の方程式は $y=(3t^2+4t-4)(x-t)+t^3+2t^2-4t$

よって $\boldsymbol{y=(3t^2+4t-4)x-2t^3-2t^2}$

(2) (1) の接線が点 $(0,\ k)$ を通るとすると

$$k=-2t^3-2t^2 \quad \cdots\cdots (*)$$

1 本の接線に対し 1 つの接点が対応するから，

接線の本数は $(*)$ の実数解 $t$ の個数に等しい． ← (接線の本数)=(接点の個数)

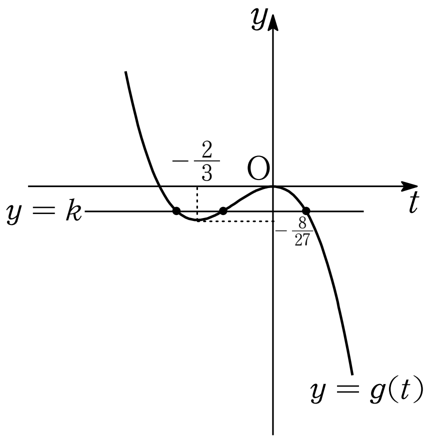
$$g(t)=-2t^3-2t^2$$

とおくと

$$g'(t)=-6t^2-4t=-2t(3t+2)$$

$g'(t)=0$ とすると $t=-\dfrac{2}{3},\ 0$

| $t$ | $\cdots$ | $-\dfrac{2}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(t)$ | ↘ | $-\dfrac{8}{27}$ | ↗ | $0$ | ↘ |




よって，$y=g(t)$ と $y=k$ の共有点の個数を考えて

$$\text{接線の本数は} \begin{cases} \boldsymbol{1} & \left(\boldsymbol{k<-\dfrac{8}{27},\ 0<k}\right) \\ \boldsymbol{2} & \left(\boldsymbol{k=-\dfrac{8}{27},\ 0}\right) \\ \boldsymbol{3} & \left(\boldsymbol{-\dfrac{8}{27}<k<0}\right) \end{cases}$$