次の問いに答えよ．

(1)　実数の定数 p に対して，3 次方程式 $x^3+x-p=0$ の実数解の個数は 1 個であることを示せ．

(2)　p，q は定数で $p \geqq 2$，$q \geqq 2$ とする。2 つの 3 次方程式

$$x^3+x-p=0,\quad x^3+x-q=0$$

の実数解をそれぞれ α，β とするとき，

$$|\alpha-\beta| \leqq \frac{1}{4}|p-q|$$

が成立することを示せ．

〔2002　阪大 文系 前期〕

〔 解答例 〕

(1)　$x^3+x-p=0$ すなわち $x^3+x=p$ ……㊍　← 定数pを分離！

$f(x)=x^3+x$ とおくと $f'(x)=3x^2+1 \geqq 1>0$

$f(x)$ は単調増加であるからグラフより

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=p \end{cases}$$

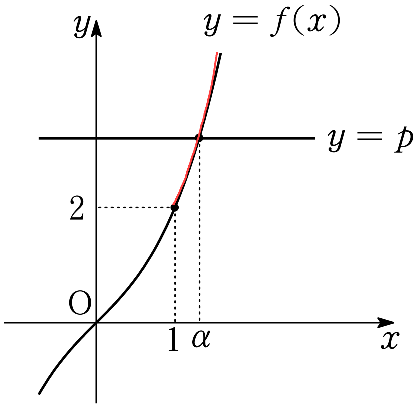
はただ一つの共有点をもつ．

よって，㊍ の実数解の個数は 1 個である．

(2)　$f(x)=2$ とすると

$$x^3+x=2 \text{ すなわち } (x-1)(x^2+x+2)=0$$

これを満たす実数は $x=1$ である．　← $f(1)=2$



条件から $f(\alpha)=p$，$f(\beta)=q$ であるから (1) より

$$\alpha^3+\alpha=p \quad \cdots\cdots①$$

$$\beta^3+\beta=q \quad \cdots\cdots②$$

これをみたし $p \geqq 2$，$q \geqq 2$ であるから

$$\alpha \geqq 1,\ \beta \geqq 1 \quad \cdots\cdots③$$　← グラフからわかる

である．

$$\begin{aligned}
(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= \frac{1}{4}|p-q|-|\alpha-\beta| \\
&= \frac{1}{4}|\alpha^3-\beta^3+\alpha-\beta|-|\alpha-\beta| \quad (\because ①,\ ②) \\
&= \frac{1}{4}|(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\alpha-\beta|-|\alpha-\beta| \\
&= \frac{1}{4}|\alpha-\beta||\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1|-|\alpha-\beta| \\
&= \frac{1}{4}|\alpha-\beta|(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1)-|\alpha-\beta| \quad (\because ③) \\
&= \frac{1}{4}|\alpha-\beta|(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3)
\end{aligned}$$

ここで $|\alpha-\beta| \geqq 0$，③ から $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3 \geqq 1^2+1\cdot1+1^2-3=0$

よって $(\text{右辺})-(\text{左辺}) \geqq 0$ であるから示された．等号成立は「$\alpha-\beta=0$」 または「$\alpha=1$ かつ $\beta=1$」なので $\alpha=\beta$

〔 別解例 〕

(2)　あ　$\alpha=\beta$ のとき $p=q$ であるから

$$(\text{左辺})=|\alpha-\beta|=0$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{4}|p-q|=0$$

すなわち（左辺）＝（右辺）

い　$\alpha \neq \beta$ のとき

$$\frac{|p-q|}{|\alpha-\beta|}=\frac{|\alpha^3-\beta^3+\alpha-\beta|}{|\alpha-\beta|}$$

← (分母) $\neq 0$

$$=\frac{|\alpha-\beta||\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1|}{|\alpha-\beta|}$$

$|\alpha-\beta|$ を約分

$$=|\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1|$$

$$\geqq 1+1+1+1 \quad (\because \alpha \geqq 1,\ \beta \geqq 1)$$

$$=4$$

これより $\dfrac{|p-q|}{|\alpha-\beta|} \geqq 4$

すなわち $\dfrac{1}{4}|p-q| \geqq |\alpha-\beta|$ が成り立つ.

よって あ，い より示された.