数学Ⅱ　式と証明

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

二項定理

n を自然数とする．

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$$

とくに

$\boxed{1}$ ${}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k$ を $(a+b)^n$ の展開式の 一般項（いっぱんこう）という．

$\boxed{2}$ ${}_n\mathrm{C}_k$ を 二項係数（にこうけいすう）という．

例 $(a+b)^3 = {}_3\mathrm{C}_0 a^3 + {}_3\mathrm{C}_1 a^2b + {}_3\mathrm{C}_2 ab^2 + {}_3\mathrm{C}_3 b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

このことを説明すると次になる．

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

展開すると 3 つの $(a+b)$ からそれぞれ a または b を取り出して積にすることから

□ を a または b として

$\square \times \square \times \square =$ (1 つの項)

$a \times a \times a = a^3$

$a \times a \times b = a^2b$

$a \times b \times a = a^2b$

$b \times a \times a = a^2b$

$a \times b \times b = ab^2$

$b \times a \times b = ab^2$

$b \times b \times a = ab^2$

$b \times b \times b = b^3$

すなわち

$$(a+b)^3 = \underbrace{{}_3\mathrm{C}_0}_{aaa\text{ の並べ方}} a^3 + \underbrace{{}_3\mathrm{C}_1}_{aab\text{ の並べ方}} a^2b + \underbrace{{}_3\mathrm{C}_2}_{abb\text{ の並べ方}} ab^2 + \underbrace{{}_3\mathrm{C}_3}_{bbb\text{ の並べ方}} b^3$$

考 $(a+b)^n$ の $a^{n-k}b^k$ の係数は

□ を a または b として

$\square \times \square \times \square \times \cdots \times \square =$ (1 つの項)

であることから $\underbrace{aa\cdots a}_{(n-k)\text{ 個}}\ \underbrace{bb\cdots b}_{k\text{ 個}}$ の並べ方 ${}_n\mathrm{C}_k$（通り）

多項（三項）定理

n を自然数，p，q，r を 0 以上の整数とする．

$$(a+b+c)^n=\sum_{p+q+r=n}\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$$

ただし

$\displaystyle\sum_{p+q+r=n}$ は $p+q+r=n$ をみたす 0 以上のすべての整数の組 $(p,\ q,\ r)$ での和を表す．

1. $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ を $(a+b+c)^n$ の展開式の 一般項（いっぱんこう） という．
2. $\dfrac{n!}{p!q!r!}$ を 多項係数（たこうけいすう） という．

p，q，r の 3 個が n 個になっても考え方は同じ．

補 二項定理 と同じ考え方．3 個以上の項を多項とする．

考 $(a+b+c)^n$ の $a^pb^qc^r$ の係数は

□ を a または b または c として

$\square\times\square\times\square\times\cdots\times\square=$（1 つの項）

であることから $\underbrace{aa\cdots a}_{p\text{ 個}}\ \underbrace{bb\cdots b}_{q\text{ 個}}\ \underbrace{cc\cdots c}_{r\text{ 個}}$ の並べ方 $\dfrac{n!}{p!q!r!}$（通り）

多項定理

n を自然数，p_1，p_2，$\cdots$，p_n を 0 以上の整数とする．

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^n=\sum_{p_1+p_2+\cdots+p_n=n}\frac{n!}{p_1!p_2!\cdot\cdots\cdot p_n!}{a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdot\cdots\cdot{a_n}^{p_n}$$

ただし

$\displaystyle\sum_{p_1+p_2+\cdots+p_n=n}$ は $p_1+p_2+\cdots+p_n=n$ をみたす 0 以上のすべての整数の

組 $(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$ での和を表す．

n 次の整式

n を 0 以上の整数，a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_1，a_0 を実数，$a_n \neq 0$ とする．

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

の形で表される $f(x)$ を x に関する **n 次の整式** という．

ただし $n = 0$ かつ $a_0 = 0$ つまり $f(x) = 0$ は次数を定義しない．

㊥ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ と表せる．

㊥ $f(x)$ を x に関する n 次多項式ともいう．

整式の四則演算

2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ に対して

和 $f(x) + g(x)$，差 $f(x) - g(x)$，積 $f(x)g(x)$ はすべて整式になる．

商：$f(x) \div g(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\big(g(x) \neq 0\big)$ は整式にならないことがある．

整式の次数

$f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ m 次の整式，n 次の整式とすると

[1] 和 $f(x) + g(x)$，差 $f(x) - g(x)$ について

$m > n$ ならば　m 次の整式

$m < n$ ならば　n 次の整式

$m = n$ ならば　m 次以下の整式 または 0

[2] 積 $f(x)g(x)$ は $(m+n)$ 次の整式

㊥ 0 は次数を定義しないが，$(-\infty)$ 次と考えることもできる．

㊡ $f(x)$ が 2 次の整式，$g(x)$ が 1 次の整式 ならば

[1] $f(x) + g(x)$ は 2 次の整式，$f(x) - g(x)$ は 2 次の整式

[2] $f(x)g(x)$ は 3 次式

分数式

A，B を整式とするとき，

$\dfrac{A}{B}$ の形で表され，しかも B に文字を含む式を **分数式**（ぶんすうしき）といい，

B をその **分母**（ぶんぼ），A をその **分子**（ぶんし）という．

㊀例 $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ のような式を分数式といい x^2+x+1 を分母，$2x+1$ を分子という．

分数式の約分

分数式 は

1 分母と分子に 0 でない同じ整式をかけて，もとの分数式に等しい．

2 分母と分子を共通因数で割って，もとの分数式に等しい．

すなわち

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}\quad (\text{ただし，} B \fallingdotseq 0,\ C \fallingdotseq 0)$$

とくに 分数式の分母と分子をその共通因数で割ることを **約分**（やくぶん）するという．

既約分数式

それ以上約分できない分数式 を **既約分数式**（きやくぶんすうしき）という．

通分

2 つ以上の分数式の分母を同じ整式にすることを **通分**（つうぶん）するという．

補 分母が異なる分数式の加法・減法は，各分数式の分母と分子に適当な整式をかけて，分母を同じ分数式にして計算できる．

例 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{x(x+1)}+\dfrac{x}{x(x+1)}=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$

分数式の加法・減法

$\boxed{1}$ $\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$

$\boxed{2}$ $\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$

分数式の乗法・除法

$\boxed{1}$ $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$

$\boxed{2}$ $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

比の値

比 $a:b$ について $\dfrac{a}{b}$ を 比(ひ)の値(あたい) という．

比例式

比 $a:b$ と比 $c:d$ が等しいことを表す等式

$a:b=c:d$ または $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ を 比例式(ひれいしき) という．

連比

3 つ以上の数の比を 1 つにまとめたもの を 連比(れんぴ) という．

すなわち 3 つの数 a，b，c について

$a:b$ かつ $b:c$ かつ $c:a$

となることを $a:b:c$ とかき a，b，c の連比という．

恒等式

文字を含む等式において，その両辺に値が存在する限り，

含まれている文字にどのような値を代入しても 等式が常に成り立つとき，

その等式をそれらの文字についての **恒等式**（こうとうしき） という．

例 $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ を x の恒等式という．

1 次式以下の恒等式

a，b，p，q を定数とするとき

$\boxed{1}$ $ax+b=0$ が x についての恒等式 $\iff$ $a=0$ かつ $b=0$

$\boxed{2}$ $ax+b=px+q$ が x についての恒等式 $\iff$ $a=p$ かつ $b=q$

考 $\boxed{1}$ $ax+b=0$ ……㊟

とおく．

（$\Longrightarrow$ について）

㊟ が x の恒等式とすると $x=0, 1$ を代入しても等式は成り立つので

$$\begin{cases} b=0 \\ a+b=0 \end{cases}$$

すなわち $a=0$ かつ $b=0$

（$\Longleftarrow$ について）

$a=0$ かつ $b=0$ ならば $ax+b=0x+0=0$

任意の x に対して ㊟ は成り立つ．

すなわち ㊟ は x の恒等式である．

$\boxed{2}$ $\quad ax+b=px+q$ が x の恒等式

$\iff (a-p)x+b-q=0$ が x の恒等式

$\iff a-p=0$ かつ $b-q=0$ $\quad (\because \boxed{1})$

$\iff a=p$ かつ $b=q$

2次式以下の恒等式

a, b, c, p, q, r を定数とするとき

$\boxed{1}$ $ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式

$$\iff a=0 \text{ かつ } b=0 \text{ かつ } c=0$$

$\boxed{2}$ $ax^2+bx+c=px^2+qx+r$ が x についての恒等式

$$\iff a=p \text{ かつ } b=q \text{ かつ } c=r$$

考 $\boxed{1}$ $ax^2+bx+c=0$ ……㊟

とおく.

($\Longrightarrow$ について)

㊟ が x の恒等式とすると $x=-1, 0, 1$ を代入しても等式は成り立つので

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$$

すなわち $a=0$ かつ $b=0$ かつ $c=0$

($\Longleftarrow$ について)

$a=0$ かつ $b=0$ かつ $c=0$ ならば $ax^2+bx+c=0x^2+0x+0=0$

任意の x に対して ㊟ は成り立つ.

すなわち ㊟ は x の恒等式である.

$\boxed{2}$ $ax^2+bx+c=px^2+qx+r$ が x の恒等式

$\iff (a-p)x^2+(b-q)x+c-r=0$ が x の恒等式

$\iff a-p=0$ かつ $b-q=0$ かつ $c-r=0$ ($\because \boxed{1}$)

$\iff a=p$ かつ $b=q$ かつ $c=r$

整式の恒等式

$P(x)$，$Q(x)$ を x についての整式とするとき

$\boxed{1}$ $P(x)=0$ が x についての恒等式 $\iff$ $P(x)$ の各項の係数はすべて 0

$\boxed{2}$ $P(x)=Q(x)$ が x についての恒等式

$\iff$ $P(x)$ と $Q(x)$ の次数が等しい かつ
両辺の同じ次数の各項の係数はそれぞれ等しい

すなわち $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0$，$b_n,\ b_{n-1},\ \cdots,\ b_1,\ b_0$ を定数とするとき

$\boxed{1}$ $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ が x についての恒等式

$\iff a_n=0$ かつ $a_{n-1}=0$ かつ $\cdots$ かつ $a_1=0$ かつ $a_0=0$

$\boxed{2}$ $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$
が x についての恒等式

$\iff a_n=b_n$ かつ $a_{n-1}=b_{n-1}$ かつ $\cdots$ かつ $a_1=b_1$ かつ $a_0=b_0$

参 1 次式以下の恒等式，2 次式以下の恒等式

整式の割り算

$P(x)$ を整式，$A(x)$ を 0 でない整式とすると

$$P(x)=A(x)Q(x)+R(x)$$

$R(x)$ は 0 または $A(x)$ より次数の低い整式

となる $Q(x)$，$R(x)$ は 1 通りに定まる.

$$\begin{array}{r} Q(x) \\ A(x)\,\big)\,\overline{\;P(x)\;} \\ \vdots \\ \hline R(x) \end{array}$$

このとき

$Q(x)$ を $P(x)$ を $A(x)$ で割ったときの 商（しょう） という.

$R(x)$ を $P(x)$ を $A(x)$ で割ったときの 余（あま）り という.

とくに

$R(x)=0$ ならば $P(x)$ は $A(x)$ で **割り切れる** という.

$R(x)\neq 0$ ならば $P(x)$ は $A(x)$ で **割り切れない** という.

剰余の定理

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは

$$P(\alpha)$$

$$\begin{array}{rl} x-\alpha \,\big) & \overline{\ P(x)\ } \\ & \quad\vdots \\ \hline & P(\alpha) \end{array}$$

考 整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを r (r は定数) とすると

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+r$$

これは x の恒等式である．

ここで $x=\alpha$ として $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+r$

よって $P(\alpha)=r$

$$\begin{array}{rl} & \ Q(x) \\ x-\alpha \,\big) & \overline{\ P(x)\ } \\ & \quad\vdots \\ \hline & \quad r \end{array}$$

例 $P(x)=x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$ を $x-1$ で割ったときの余りは

$P(1)=1+2+3+4+5+6=\mathbf{21}$

因数定理

$P(x)$ を整式とする．

$$P(\alpha)=0 \iff P(x) \text{ が 1 次式 } x-\alpha \text{ を因数にもつ}$$

考 剰余の定理 より

$P(x)$ を $x-\alpha$ で割ると余りが 0

$\iff P(\alpha)=0$

$\iff P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ となる整式 $Q(x)$ が存在する

$$\begin{array}{rl} & \ Q(x) \\ x-\alpha \,\big) & \overline{\ P(x)\ } \\ & \quad\vdots \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

例 $P(x)=x^3-x^2+x-1$ について

$P(1)=0$ であるから $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．

実際 $P(x)=(x-1)(x^2+1)$

恒等式の証明

恒等式 $A = B$ を証明するには，次のような方法がよく用いられる．

$\boxed{1}$ A か B の一方を変形して，他方を導く．

$\boxed{2}$ A と B の両方を変形して，同じ式を導く．

$\boxed{3}$ $A - B$ を変形して，0 になることを示す．

不等式の証明

不等式 $A > B$ を証明するには，次のような方法がよく用いられる．

$\boxed{1}$ $A - B$ を変形して，正になることを示す．

$\boxed{2}$ $B - A$ を変形して，負になることを示す．

$\boxed{3}$ A を変形して，B より大きいことを示す．

$\boxed{4}$ B を変形して，A より小さいことを示す．

$\boxed{5}$ $A > C$ かつ $C > B$ となる C が存在することを示す．

㊗ 直接証明するのが厳しいときは，証明できるように同値変形する．

実数の平方の性質

実数の平方は 0 以上である.

つまり (実数)$^2 \geqq 0$

この性質から次が成り立つ.

$\boxed{1}$ 実数 a について

$$a^2 \geqq 0$$

等号が成り立つのは $a = 0$

$\boxed{2}$ 2 つの実数 a, b について

$$a^2 + b^2 \geqq 0$$

等号が成り立つのは $a = 0$ かつ $b = 0$

正の数の平方の大小関係

$a > 0$, $b > 0$ のとき, 次のことが成り立つ.

$\boxed{1}$ $a^2 > b^2 \iff a > b$

$\boxed{2}$ $a^2 = b^2 \iff a = b$

$\boxed{3}$ $a^2 \geqq b^2 \iff a \geqq b$

相加平均と相乗平均

2つの実数 a，b について

$\boxed{1}$ $\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の 相加平均（そうかへいきん） という．

$\boxed{2}$ $a>0$，$b>0$ のとき $\sqrt{ab}$ を a と b の 相乗平均（そうじょうへいきん） という．

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき

（a と b の相加平均）$\geqq$（a と b の相乗平均）

つまり

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは $a=b$

考 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqq 0$ （$\because \sqrt{a}-\sqrt{b}$ は実数）

よって $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \geqq 0$ である．

等号が成り立つのは $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ すなわち $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ $\therefore a=b$

補 「$a>0$，$b>0$」の条件は「$a \geqq 0$，$b \geqq 0$」としてもよいが，相乗平均が定まらない．

要

分数が扱いにくいので，次のように同値変形して使うことが多い．

$a>0$，$b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \iff a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは $a=b$

実数の三角不等式

x，y を実数とするとき，次が成り立つ.

$\boxed{1}$ $|x+y| \leqq |x|+|y|$

等号が成り立つのは $xy \geqq 0$

$\boxed{2}$ $|x|-|y| \leqq |x+y|$

等号が成り立つのは $(x+y)y \leqq 0$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ をまとめて

$$|x|-|y| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|$$

と表せて，これを 三角不等式（さんかくふとうしき） という.

㊫ $\boxed{1}$ $|x+y| \geqq 0$，$|x|+|y| \geqq 0$ である.

$$\begin{aligned}(|x|+|y|)^2-|x+y|^2 &= x^2+2|xy|+y^2-(x^2+2xy+y^2)\\ &= 2\big(|xy|-xy\big) \geqq 0\end{aligned}$$

これより $|x+y|^2 \leqq (|x|+|y|)^2$

よって $|x+y| \leqq |x|+|y|$ である.

等号が成り立つのは $|xy|-xy=0$ より $xy \geqq 0$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ を考えて

$|x|=|(x+y)+(-y)| \leqq |x+y|+|-y|=|x+y|+|y|$

よって $|x|-|y| \leqq |x+y|$ である.

等号が成り立つのは $(x+y)(-y) \geqq 0$ すなわち $(x+y)y \leqq 0$

㊀別 $|x+y| \geqq 0$ である.

$|x|-|y|<0$ ならば $|x|-|y|<0 \leqq |x|+|y|$ より成り立つ.

$|x|-|y| \geqq 0$ ならば

$$\begin{aligned}|x+y|^2-(|x|-|y|)^2 &= x^2+2xy+y^2-\big(x^2-2|xy|+y^2\big)\\ &= 2(xy+|xy|) \geqq 0\end{aligned}$$

これより $\big(|x|-|y|\big)^2 \leqq |x+y|^2$

よって $|x|-|y| \leqq |x+y|$

等号が成り立つのは

$|x|-|y| \geqq 0$ かつ $xy+|xy|=0$ すなわち $|x|=|y|$ かつ $xy \leqq 0$

これは $(x+y)y \leqq 0$ と同値である.

2次のコーシー・シュワルツの不等式

a, b, x, y が実数 のとき

$$(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

等号が成り立つのは

$(a,\ b)=(0,\ 0)$ または $(x,\ y)=(0,\ 0)$ または $a:b=x:y$

㊫ コーシーの不等式，シュワルツの不等式，シュヴァルツの不等式 などとも言う．

㊮ $(a,\ b)=(0,\ 0)$ または $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき （左辺）＝（右辺）＝0

$(a,\ b)\fallingdotseq(0,\ 0)$ かつ $(x,\ y)\fallingdotseq(0,\ 0)$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= (a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2\\ &= (ax)^2+(ay)^2+(bx)^2+(by)^2-\{(ax)^2+2abxy+(by)^2\}\\ &= (ay)^2-2abxy+(bx)^2\\ &= (ay-bx)^2 \geqq 0\ (\because ay-bx \text{ は実数})\end{aligned}$$

等号が成り立つのは $ay-bx=0$

よって $a:b=x:y$

3次のコーシー・シュワルツの不等式

a, b, c, x, y, z が実数 のとき

$$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

等号が成り立つのは

$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ または $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$

または $a:b:c=x:y:z$

㊮ $(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ または $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$ のとき （左辺）＝（右辺）＝0

$(a,\ b,\ c)\fallingdotseq(0,\ 0,\ 0)$ かつ $(x,\ y,\ z)\fallingdotseq(0,\ 0,\ 0)$ のとき

$$\begin{aligned}&(\text{右辺})-(\text{左辺})\\ &= (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2\\ &= (ax)^2+(ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(by)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2+(cz)^2\\ &\qquad -\{(ax)^2+(by)^2+(cz)^2+2abxy+2bcyz+2cazx\}\\ &= (ay)^2-2abxy+(bx)^2+(bz)^2-2bcyz+(cy)^2+(cx)^2-2cazx+(az)^2\\ &= (ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0\\ &\qquad (\because ay-bx,\ bz-cy,\ cx-az \text{ はすべて実数})\end{aligned}$$

等号が成り立つのは $ay-bx=0$ かつ $bz-cy=0$ かつ $cx-az=0$

すなわち $a:b=x:y$ かつ $b:c=y:z$ かつ $c:a=z:x$

よって $a:b:c=x:y:z$

一般的なコーシー・シュワルツの不等式

$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ が実数のとき

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\right)$$

すなわち

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqq ({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2)$$

等号が成り立つのは

$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ または $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$

または $a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$

考 あ $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ または $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ のとき

(左辺) = (右辺) = 0

い $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\fallingdotseq(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ かつ $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)\fallingdotseq(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ のとき

x を実数として

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx-b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}({a_k}^2t^2-2a_kb_kx+{b_k}^2)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)x^2-2\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2 \geqq 0$$

これが任意に実数 x に対して成り立つ.

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2>0$

$\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)x^2-2\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2=0$ の判別式を D として

$$\frac{D}{4}=\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\right)\leqq 0$$

すなわち $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\right)$

等号が成り立つのは

$a_kx-b_k=0\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

つまり $b_1=xa_1$ かつ $b_2=xa_2$ かつ $\cdots$ かつ $b_n=xa_n$

すなわち $a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$