追加問題解答例「図形と方程式 ③」

**1.**　$t$ を実数とする．放物線 $y=x^2$ と直線 $y=t(x+2)$ が異なる 2 点 P，Q で交わっている．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$t$ の値の範囲を求めよ．

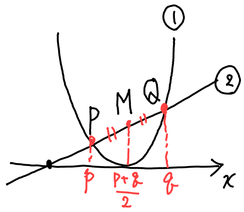
(2)　線分 PQ の中点 M を $t$ で表せ．

(3)　線分 PQ の中点 M の軌跡を求め，図示せよ．

〔 解答例 〕

(1)　$y=x^2$ ……①

$y=t(x+2)$ ……②　← ②は定点 $(-2, 0)$ を通り傾きが $t$ の直線




①＝① として　$x^2=t(x+2)$

すなわち　$x^2-tx-2t=0$ ……(＊)

これが異なる 2 つの実数解 $t$ を持つ．　← 実数解は P, Q の $x$ 座標

(＊) の判別式を $D$ として

$$D=t^2+8t=t(t+8)>0$$

よって　$\boldsymbol{t<-8,\ 0<t}$ ……③

(2)　P，Q の $x$ 座標をそれぞれ $p,\ q$ とすると

$p,\ q$ は (＊) の解なので解と係数の関係を用いて

$$p+q=t \quad \cdots\cdots ④$$

$\mathrm{M}(X, Y)$ とすると　$X=\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{t}{2}$　($\because$ ④)

点 M は ② 上にあるので　$Y=t(X+2)=t\left(\dfrac{t}{2}+2\right)=\dfrac{t^2}{2}+2t$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{2}+2t\right)}$

(3)　$\mathrm{M}(X, Y)$ とおくと

$$\begin{cases} X=\dfrac{t}{2} & \cdots\cdots ⑤ \\ Y=\dfrac{t^2}{2}+2t & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤ より　$t=2X$ ……⑤′　← ⑤ から $t$ を消して $X, Y$ の関係式を作る

⑤′ を ⑥ へ代入して　$Y=2X^2+4X$

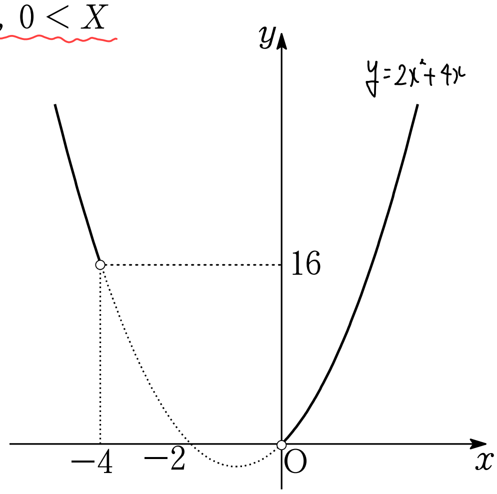
⑤′ を ③ へ代入して　$2X<-8,\ 0<2X$　　$\therefore X<-4,\ 0<X$

よって，M の軌跡は

**放物線 $\boldsymbol{y=2x^2+4x\ (x<-4,\ 0<x)}$**

$y=y=2x^2+4x=2x(x+2)=2(x+1)^2-2$

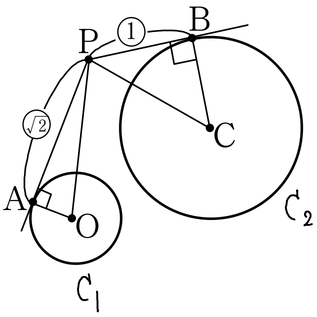
図示すると右図．



**2.**　$xy$ 平面上の点 P から 2 円 $C_1: x^2+y^2=1$，$C_2: (x-3)^2+(y-2)^2=4$ に引いた 2 接線との接点をそれぞれ A，B とする．$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=\sqrt{2}:1$ を満たす点 P の軌跡を求めよ．

〔解答例〕

$C_1$ の中心を O(0, 0)，半径 1，$C_2$ の中心 C(3, 2)，半径 2 とする．




P$(X, Y)$ とおき △OAP，△CBP にそれぞれ三平方の定理を用いて

$$\mathrm{PA}=\sqrt{\mathrm{OP}^2-\mathrm{OA}^2}=\sqrt{X^2+Y^2-1}$$
$$\mathrm{PB}=\sqrt{\mathrm{CP}^2-\mathrm{CB}^2}=\sqrt{(X-3)^2+(Y-4)^2-4}$$
$$=\sqrt{X^2+Y^2-6X-4Y+9}$$

条件は

$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=\sqrt{2}:1$ より　$\mathrm{PA}=\sqrt{2}\,\mathrm{PB}$

両辺正より　$\mathrm{PA}^2=2\mathrm{PB}^2$　と同値である．

これより　$X^2+Y^2-1=X^2+Y^2-6X-4Y+9$

すなわち　$X^2+Y^2-12X-8Y+19=0$

変形して　$(X-6)^2+(Y-4)^2=33$

よって，P の軌跡は **中心 (6, 4)，半径 $\sqrt{33}$ の円**

$xy$ 平面において，連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4 \\ x+y \leqq 2 \end{cases}$$

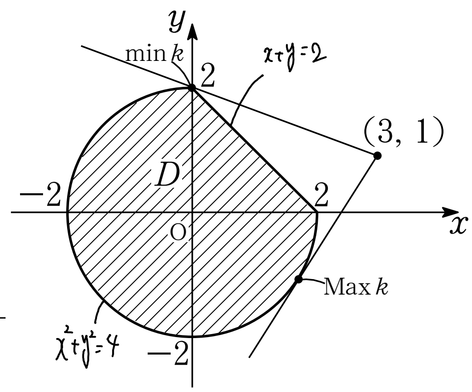
の表す領域を $D$ とする．

(1)　$D$ を図示せよ．

(2)　$D$ を満たす $(x,\ y)$ に対して，$\dfrac{y-1}{x-3}$ の値の最大値と最小値を求めよ．

〔 解答例 〕

(1)　$D$ は右図斜線部（境界線含む）




(2)　$\dfrac{y-1}{x-3}=k$　← $k$は2点$(1,3),(x,y)$を通る直線の傾き

とすると　$y=k(x-3)+1$　……①

① は定点 $(3,\ 1)$ を通り，傾きが $k$ の直線である．

① が領域 $D$ と共有点をもち，$k$ が最大，最小となる点を考える．

$k$ が最小となるのは $(x,\ y)=(0,\ 2)$ のときで　$k=-\dfrac{1}{3}$

$k=\dfrac{2-1}{0-3}$

よって，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

$k$ が最大となるのは ① が $x^2+y^2=4$ と第 4 象限で接するときである．

このとき

$$2=\frac{|-3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}\quad \text{すなわち}\quad 2\sqrt{k^2+1}=|-3k+1|$$

← (半径)= 中心と接線の距離

両辺を 2 乗して　$4(k^2+1)=9k^2-6k+1$

すなわち　$5k^2-6k-3=0$　　$\therefore k=\dfrac{3\pm2\sqrt{6}}{5}$

最大となるのは　$k=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}$

よって，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}}$