追加問題解答例「図形と方程式 ②」

1.　円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と直線 $\ell : y = 2x + k$ について，次の問いに答えよ．

(1)　円 C 上点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　円 C と直線 ℓ が異なる 2 つの交点をもつような k の値の範囲を求めよ．

(3)　(2) のとき，2 つの交点を A，B とする．$\mathrm{AB} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$ となる k の値を求めよ．

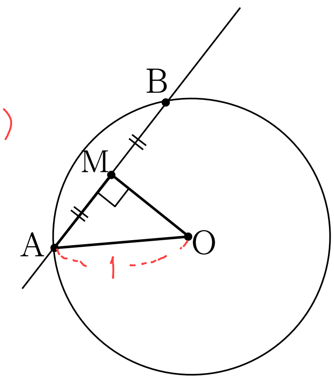
〔解答例〕

(1)　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 1}$　← $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は $x_0x+y_0y=r^2$

(2)　AB の中点を M とすると　← C の中心 $(0,0)$ と ℓ の距離が OM で OM < (C の半径)

$$\mathrm{OM} = \frac{|k|}{\sqrt{5}} < 1 \quad \text{すなわち} \quad |k| < \sqrt{5}$$

よって　$\boldsymbol{-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}}$



(3)　$\mathrm{AM} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

△OAM に三平方の定理を用いて

$$\mathrm{AM}^2 + \mathrm{OM}^2 = \mathrm{OA}^2 \quad \text{より} \quad \frac{4}{5} + \frac{k^2}{5} = 1 \quad \text{すなわち} \quad k^2 = 1$$

よって　$\boldsymbol{k = \pm 1}$

2.　2 つの円 $x^2 + y^2 = 1$，$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ がある．

(1)　この 2 つの円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ．

(2)　この 2 つの円の 2 つの交点を通り，点 $(3, 0)$ を通る円の方程式を求めよ．

〔解答例〕　東

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \cdots\cdots ① \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(1)　① − ② として　$4x - 6y + 1 = 1$　← x^2, y^2 を消す

よって　$\boldsymbol{2x - 3y = 0}$

(2)　② は $(3, 0)$ を通らないので，求める円の方程式は

$$x^2 + y^2 - 1 + k(x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1) = 0 \ (k \text{ は実数}) \quad \cdots\cdots ☆$$

$k \neq -1$

と表せる．これが $(3, 0)$ を通るので

$$8 + k(-4) = 0 \qquad \therefore k = 2$$

よって ☆ より　$k=2$ を ☆ へ代入

$x^2 + y^2 - 1 + 2(x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1) = 0$　すなわち　$3x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 3 = 0$

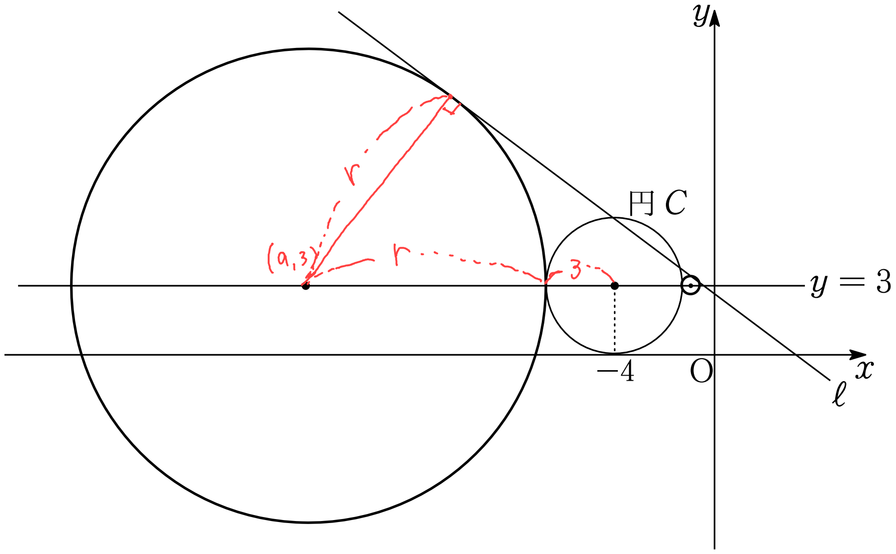
よって　$\boldsymbol{x^2 + y^2 - \dfrac{8}{3}x + 4y - 1 = 0}$

3. xy 平面上に円 $C : x^2+y^2+8x-6y+16=0$ と直線 $\ell : -3x-4y+12=0$ がある．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 円 C の中心の座標と半径を求めよ．

(2) 円 D は直線 ℓ に接し，円 C と外接している．また，その中心の y 座標が円 C の中心の y 座標に等しい．円 D の中心の座標と半径を求めよ．

〔解答例〕



(1) 円 $C : (x+4)^2+(y-3)^2=9$

よって **中心 $(-4,3)$，半径 3**　← Dの中心と半径を文字でおく，aとrを求めるとよい

(2) 円 D の中心を $(a,3)$，半径を $r\ (r>0)$ とおくと，円 D と直線 ℓ は接するので

$$r=\frac{|-3a-4\cdot3+12|}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}|a| \quad \cdots\cdots①$$

← Dの中心とℓの距離が Dの半径に一致

円 C と円 D は外接するので

$$r+3=|a-(-4)|=|a+4| \quad \cdots\cdots②$$

← (半径の和)=(中心間の距離)

|a| と |a+4| の絶対値をはずす

a	…	−4	…	0	…
a	−	−	−	0	+
a+4	−	0	+	+	+

㋐ $a<-4$ のとき

①，② は $\begin{cases} r=-\dfrac{3}{5}a \\ r+3=-(a+4) \end{cases}$　$\therefore a=-\dfrac{35}{2},\ r=\dfrac{21}{2}$

㋑ $-4 \leqq a \leqq 0$ のとき

①，② は $\begin{cases} r=-\dfrac{3}{5}a \\ r+3=a+4 \end{cases}$　$\therefore a=-\dfrac{5}{8},\ r=\dfrac{3}{8}$

㋒ $0<a$ のとき

①，② は $\begin{cases} r=\dfrac{3}{5}a \\ r+3=a+4 \end{cases}$　$\therefore a=-\dfrac{5}{2}$ となるが $0<a$ より不適．

よって ㋐，㋑，㋒ より **中心 $\left(-\dfrac{35}{2},3\right)$，半径 $\dfrac{21}{2}$** または **中心 $\left(-\dfrac{5}{8},3\right)$，半径 $\dfrac{3}{8}$**