追加問題解答例「図形と方程式 ①」

1.　3 直線 $2x+y=4$，$3x-ay=-4$，$-ax+y=0$ がある．この 3 直線で三角形ができないような定数 a の値をすべて求めよ．

〔解答例〕

$$\begin{cases} 2x+y=4 & \cdots\cdots① \\ 3x-ay=-4 & \cdots\cdots② \\ -ax+y=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

この 3 直線で三角形ができないのは 2 つの直線が平行であるか 1 点交わるときである．

㋐ ①∥② のとき　$2:1=3:(-a)$　であるから　$-2a=3$　$\therefore a=-\dfrac{3}{2}$　←法線ベクトルが平行

㋑ ②∥③ のとき　$3:(-a)=(-a):1$　であるから　$a^2=3$　$\therefore a=\pm\sqrt{3}$

㋒ ③∥① のとき　$(-a):1=2:1$　であるから　$-a=2$　$\therefore a=-2$

㋓ ①，②，③ が 1 点で交わるとき

$a \neq -2$ のもとで ③ と ① の交点は $\left(\dfrac{4}{a+2}, \dfrac{4a}{a+2}\right)$

これが ② 上にあるとして　$3\cdot\dfrac{4}{a+2}-a\cdot\dfrac{4a}{a+2}=-4$

両辺 $\dfrac{a+2}{4}$ をかけて　$3-a^2=-(a+2)$　すなわち　$a^2-a-5=0$　$\therefore a=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

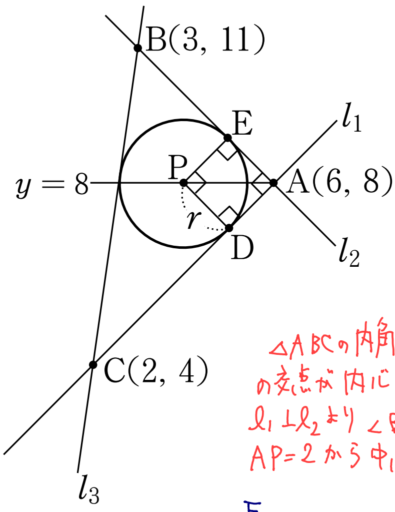
よって ㋐～㋓ より　$\boldsymbol{a=-2,\ -\dfrac{3}{2},\ \pm\sqrt{3},\ \dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}}$

2.　xy 平面上の 3 本の直線 $l_1: x-y+2=0$, $l_2: x+y-14=0$, $l_3: 7x-y-10=0$ で囲まれる三角形に内接する円の方程式を求めよ．

中心と半径を求める!

〔解答例〕

$$\begin{cases} l_1: y=x+2 \\ l_2: y=-x+14 \\ l_3: y=7x-10 \end{cases}$$



l_1 と l_2，l_2 と l_3，l_3 と l_1 の交点をそれぞれ A，B，C とすると

A(6, 8)，B(3, 11)，C(2, 4)

$\mathrm{AB}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=5\sqrt{2}$，$\mathrm{CA}=4\sqrt{2}$

$l_1 \perp l_2$　つまり　$\angle\mathrm{BAC}=90°$　より △ABC の面積を S とすると

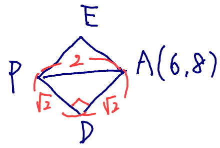
$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=12$$

△ABCの内角の二等分線の交点が内心Pとなるが $l_1 \perp l_2$ より ∠BAC=90° と AP=2 から中心Pは求まる

内接する円の半径を r とすると

$$r=\frac{2S}{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}=\frac{24}{12\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$　← 半径

内接する円の中心を P とし，l_1，l_2 との接点をそれぞれ D，E とすると



四角形 AEPD は一辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形より　$\mathrm{AP}=2$

点 P は ∠BAC の二等分線 $y=8$ 上にあるので　P(4, 8)　←中心

よって，求める円の方程式は中心 (4, 8)，半径 $\sqrt{2}$ より

$$\boldsymbol{(x-4)^2+(y-8)^2=2}$$

3.　xy 平面上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\,4)$，$\mathrm{B}(0,\,5)$ と直線 $\ell : y=2x+3$ があり，ℓ 上の任意の点を P とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　AP の最小値を求めよ．

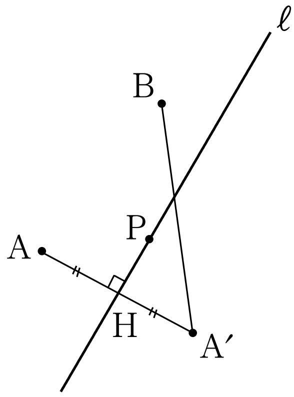
(2)　A の直線 ℓ に関する対称点 A′ の座標を求めよ．

(3)　AP + BP の最小値を求めよ．

(4)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最小値を求めよ．

〔解答例〕

$\ell : y=2x+3$　すなわち　$2x-y+3=0$



(1)　$\mathrm{A}(-1,\,4)$ から ℓ へ垂線 AH を下ろすと　$\mathrm{AP} \geqq \mathrm{AH}$

よって　P＝H　のとき AP は最小となり

最小値は　$\mathrm{AH}=\dfrac{|2(-1)-4+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{5}}}$

(2)　$\mathrm{A}'(a,\,b)$ とすると

$\mathrm{AA}' \perp \ell$ より　$\dfrac{b-4}{a+1}\cdot 2=-1$　すなわち　$a+2b=7$　……①

線分 AA′ の中点 $\left(\dfrac{a-1}{2},\,\dfrac{b+4}{2}\right)$ が ℓ 上にあるので

$\dfrac{b+4}{2}=2\cdot\dfrac{a-1}{2}+3$　すなわち　$2a-b=0$　……②

①，② を連立して　$a=\dfrac{7}{5}$，$b=\dfrac{14}{5}$　であるから　$\boldsymbol{\mathrm{A}'\left(\dfrac{7}{5},\,\dfrac{14}{5}\right)}$

(3)　$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{A'P}+\mathrm{BP} \geqq \mathrm{A'B}$　← 折れ線は対称点を利用して折り返す

よって，線分 A′B 上にあるとき AP + BP は最小となり

最小値は　$\mathrm{A'B}=\sqrt{\left(\dfrac{7}{5}\right)^2+\left(\dfrac{14}{5}-5\right)^2}=\sqrt{\dfrac{49}{25}+\dfrac{121}{25}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{170}}{5}}$

(4)　ℓ 上の点を $\mathrm{P}(t,\,2t+3)$ とおくと

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=(t+1)^2+(2t-1)^2+t^2+(2t-2)^2$　← 2点間の距離の2乗は√がなくなる

$=10t^2-10t+6$　← tの2次関数になる

$=10\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{2}$

よって $t=\dfrac{1}{2}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$