

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される曲線を C とおく. このとき, 次の間に答えよ.

- (1) y を x の式で表せ.
- (2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ.
- (3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ.

[2007 神大 理系 前期]

[解答例]

(1) $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ において, $0 \leq \sin t \leq 1$ であるから $0 \leq x \leq 1$

$\cos t \geq 0$ であるから $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$

$$y = \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

よって $y = 2x\sqrt{1 - x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$

Ⓢ C のグラフの概形は

$$y = 2\sqrt{x^2(1 - x^2)} = 2\sqrt{-x^4 + x^2}$$

$$= 2\sqrt{-\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

よりわかる. 念のため. 媒介変数 t についての増減を調べると

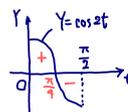
$0 < t < \frac{\pi}{2}$ において

$$\frac{dx}{dt} = \cos t > 0$$

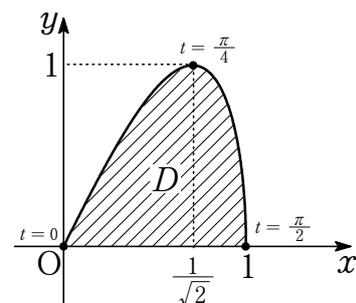
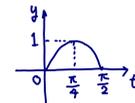
$$\frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t$$

$\frac{dy}{dt} = 0$ とすると $2t = \frac{\pi}{2}$ つまり $t = \frac{\pi}{4}$

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		+		+	
x	0	→	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	→	1
$\frac{dy}{dt}$		+		-	
y	0	↑	1	↓	0
(x, y)	(0, 0)	↗	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$	↘	(1, 0)



$\frac{dy}{dt}$ の符号については
 $y = \cos 2t$ を直接考えれば
 わかる



(2) 図形 D の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 2x\sqrt{1 - x^2} dx = \left[-\frac{2}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

[28] と同じ問題でした..

(媒介変数を用いた解答も書いて
 可)

$$y = 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{2乗}$$

(3) (1) より $y^2 = 4x^2(1-x^2)$ すなわち $4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$ となるので

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4(1-y^2)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ となる } x \text{ を } x_1 \text{ とすると } x_1^2 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{2}$$

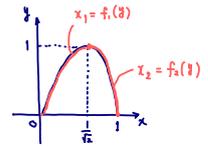
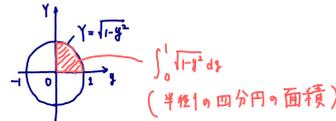
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \text{ となる } x \text{ を } x_2 \text{ とすると } x_2^2 = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{2}$$

とし、求める体積を V とすると

$$V = \int_0^1 (\pi x_2^2 - \pi x_1^2) dy = \pi \int_0^1 \left(\frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{2} \right) dy$$

$$= \pi \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = \pi \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$



← 外側の回転体の内積の回転体とつく

[別解例] (置換積分を用いて、媒介変数 t で積分する)

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dy}{dt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \cos^2 t dt \\ &= \left[-\frac{2}{3} \cos^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(3) 求める体積を V とすると

$$V = \pi \left(\int_0^1 x_2^2 dy - \int_0^1 x_1^2 dy \right)$$

$$= \pi \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \frac{dy}{dt} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \frac{dy}{dt} dt \right)$$

$$= \pi \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \frac{dy}{dt} dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 x^2 \frac{dy}{dt} dt \right)$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2 \frac{dy}{dt} dt$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t \cdot 2 \cos 2t dt = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} \cdot 2 \cos 2t dt$$

$$= -\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos 2t - \cos^2 2t) dt = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 2t - \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt$$

$$= -\pi \left[\frac{\sin 2t}{2} - \frac{t}{2} - \frac{\cos 4t}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

別) (バームクーヘン積分)

$$V = \int_0^1 2\pi xy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi xy \frac{dx}{dt} dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \sin 2t \cos t dt$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \pi \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

(1)より

$V = 4\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ にならば、 $x = \sin t$ と置換する必要がある

x^2 は t の関数に必ず同じ式 (x_1^2, x_2^2)

1つの積分にできる!

積分区間を入れかえ

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

$$\cos^2 2t = \frac{1 + \cos 4t}{2}$$