媒介変数表示

$$x=\sin t,\ y=(1+\cos t)\sin t\quad(0\leqq t\leqq\pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1)　$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ．

(2)　C の凹凸を調べ，C の概形を描け．

(3)　C で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

〔2019　神大 理系 前期〕

〔解答例〕

$$C:\begin{cases}x=\sin t\\ y=(1+\cos t)\sin t\end{cases}\qquad(0\leqq t\leqq\pi)$$

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$

$$\frac{dy}{dt}=-\sin^2 t+(1+\cos t)\cos t=-(1-\cos^2 t)+\cos t+\cos^2 t$$
$$=2\cos^2 t+\cos t-1=(\cos t+1)(2\cos t-1)$$
$$=2(\cos t+1)\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)$$

$t\neq\dfrac{\pi}{2}$ のもとで

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos^2 t+\cos t-1}{\cos t}$$
$$=\mathbf{2\cos t+1-\frac{1}{\cos t}}$$

$\dfrac{dy}{dx}=z$ とおくと $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=-2\sin t+\frac{-\sin t}{\cos^2 t}=\frac{-\sin t(2\cos^2 t+1)}{\cos^2 t}$$

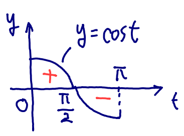
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t(2\cos^2 t+1)}{\cos t\cdot\cos^2 t}=-\frac{\sin t}{\cos t}\left(2+\frac{1}{\cos^2 t}\right)$$
$$=-\tan t\,(2+1+\tan^2 t)$$
$$=\mathbf{-\tan t(\tan^2 t+3)}$$

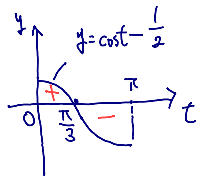
(2)　$0<t<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}<t<\pi$ において

$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ とすると　$\tan t<0$　であるから　$\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$　← $y''>0$ のとき 下に凸

$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ とすると　$\tan t>0$　であるから　$0<t<\dfrac{\pi}{2}$　← $y''<0$ のとき 上に凸

よって，C の凹凸は $\mathbf{0<t<\dfrac{\pi}{2}}$ **のとき上に凸，**$\mathbf{\dfrac{\pi}{2}<t<\pi}$ **のとき下に凸**





$0<t<\pi$ において

$\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると　$\cos t=0$　より　$t=\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{dy}{dt}=0$ とすると　$\cos t+1>0$ なので　$\cos t=\dfrac{1}{2}$　より　$t=\dfrac{\pi}{3}$

C についての増減は次のような表になる．

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$		$+$	0	$-$	
x	0	$\rightarrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	0
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\uparrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\downarrow$	1	$\downarrow$	0
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\nearrow$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$	$\searrow$	$(1,\ 1)$	$\swarrow$	$(0,\ 0)$

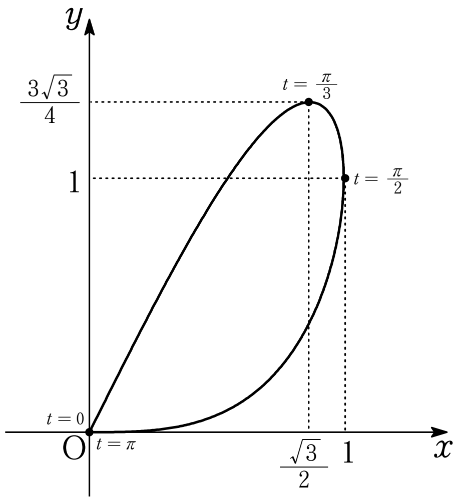
$$\lim_{t\to+0}\frac{dy}{dx}=2$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{dy}{dx}=-\infty$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{dy}{dx}=\infty$$

$$\lim_{t\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=0$$

以上より $\boldsymbol{C}$ **の概形** は右図．



(3)　C について

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における y を $y_1=f_1(x)$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ における y を $y_2=f_2(x)$

とすると

y を x の関数とみる
(t の範囲で異なる関数となる)

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 y_1\,dx - \int_0^1 y_2\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,\frac{dx}{dt}dt - \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} y\,\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,\frac{dx}{dt}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\,\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^{\pi} y\,\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^{\pi} (1+\cos t)\sin t\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\pi} (\cos t\sin t+\sin t\cos^2 t)\,dt \\
&= \left[\frac{\sin^2 t}{2}-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

← 置換して t で積分する

y は t の関数とみると同じ関数

$y=(1+\cos t)\sin t$

← 1つの積分になる

$\int g'(x)\{g(x)\}^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}\{g(x)\}^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$