追加問題解答例「ベクトル③」

1.　四面体 OABC において，点 P を辺 AB の中点，点 Q を線分 PC の中点，点 R を線分 OQ の中点とする．このとき，直線 AR が 3 点 O，B，C を通る平面と交わる点を S とし，直線 OS と直線 BC の交点を T とする．また，線分 AS の中点を M とし，直線 OM が 3 点 A，B，C を通る平面と交わる点を U とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

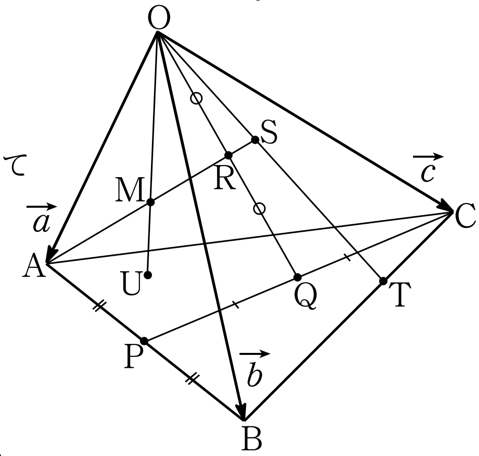
(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OU}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

〔解答例〕

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}$

$= \frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$



よって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}}$　……①

(2)　点 S は平面 OBC 上にあるので，実数 x，y を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = x\vec{b} + y\vec{c}$　……②

と表せる．

点 S は直線 AR 上にあるので 実数 t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AR}}$

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

たしたら1

$= (1-t)\vec{a} + t\left(\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right)$　(∵①)

$= \left(1 - \frac{7}{8}t\right)\vec{a} + \frac{t}{8}\vec{b} + \frac{t}{4}\vec{c}$　……③　← $\vec{a}$の係数は0

②，③より　$1 - \frac{7}{8}t = 0$　$\therefore t = \frac{8}{7}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \boldsymbol{\frac{1}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}}$　……④

(3)　点 T は直線 OS 上にあるので 実数 k を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = k\overrightarrow{\mathrm{OS}}$

$= \frac{k}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}k\vec{c}$

たしたら1

点 T は直線 BC 上にあるので　$\frac{k}{7} + \frac{2}{7}k = 1$　$\therefore k = \frac{7}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}}$

別　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{1}{7}(\vec{b} + 2\vec{c})$
$= \frac{3}{7}\cdot\underbrace{\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}}_{\overrightarrow{\mathrm{OT}}}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}}) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}\right)$　(∵④)

$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{14}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$　……⑤

別　$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{14}(7\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$
$= \frac{10}{14}\cdot\underbrace{\frac{7\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{10}}_{\overrightarrow{\mathrm{OU}}}$

点 U は直線 OM 上にあるので　実数 s を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

$= \frac{s}{2}\vec{a} + \frac{s}{14}\vec{b} + \frac{s}{7}\vec{c}$　(∵⑤)

たしたら1

点 U は平面 ABC 上にあるので $\dfrac{s}{2}+\dfrac{s}{14}+\dfrac{s}{7}=1 \quad \therefore s=\dfrac{7}{5}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\boldsymbol{\dfrac{7}{10}\vec{a}+\dfrac{1}{10}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}}$

2. O を原点とする空間において，点 A$(4,\,0,\,-2)$ を通り，ベクトル $\vec{a}=(1,\,2,\,1)$ に平行な直線を l，点 B$(5,\,-5,\,-1)$ を通り，ベクトル $\vec{b}=(-1,\,1,\,1)$ に平行な直線を m とする．点 P は l 上に，点 Q は m 上にあり，しかもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は l と m の両方に垂直になっているものとする．このとき，次の問に答えよ．

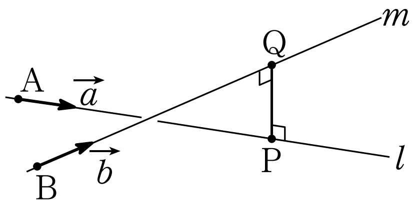
(1)　点 P，Q の座標を求めよ．

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を求めよ．

(3)　△OPQ の面積を求めよ．

〔解答例〕

(1)　点 A$(4,\,0,\,-2)$ を通り，ベクトル $\vec{a}=(1,\,2,\,1)$ に平行な直線 l 上に P，
点 B$(5,\,-5,\,-1)$ を通り，ベクトル $\vec{b}=(-1,\,1,\,1)$ に平行な直線 m 上に Q
があるので，実数 s，t を用いて



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\vec{a}=(4,\,0,\,-2)+s(1,\,2,\,1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\vec{b}=(5,\,-5,\,-1)+t(-1,\,1,\,1)$$

と表せる．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\,-5,\,1)+t(-1,\,1,\,1)-s(1,\,2,\,1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp l$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp m$ より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{a}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a}=0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{b}=0$$

← 垂直なので内積0

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a}=(1-10+1)+t(-1+2+1)-s(1+4+1)=-8+2t-6s=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{b}=(-1-5+1)+t(1+1+1)-s(-1+2+1)=-5+3t-2s=0$$

すなわち $\begin{cases} t-3s=4 \\ 3t-2s=5 \end{cases} \qquad \therefore s=-1,\ t=1$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\,0,\,-2)-(1,\,2,\,1)=(3,\,-2,\,-3)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(5,\,-5,\,-1)+(-1,\,1,\,1)=(4,\,-4,\,0)$$

よって $\mathbf{P(3,\,-2,\,-3)}$，$\mathbf{Q(4,\,-4,\,0)}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\cdot4+(-2)(-4)+(-3)\cdot0=\mathbf{20}$

(3)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=3^2+(-2)^2+(-3)^2=22$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=4^2+(-4)^2+0^2=32$

△OPQ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{22\cdot32-20^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{704-400}=\frac{1}{2}\sqrt{304}=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{19}$$
$$=\mathbf{2\sqrt{19}}$$