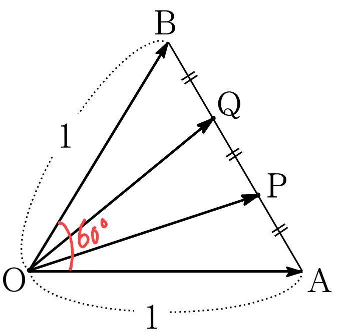
追加問題解答例「ベクトル②」

1.　一辺の長さが 1 の正三角形 OAB で，辺 AB の三等分を A から近い順に P，Q とする．
このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を求めよ．

〔解答例〕

正三角形の3つの内角はすべて60°



$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 1$,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

線分 AB を 1：2 に内分する点が P，2：1 に内分する点が Q なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

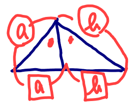
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

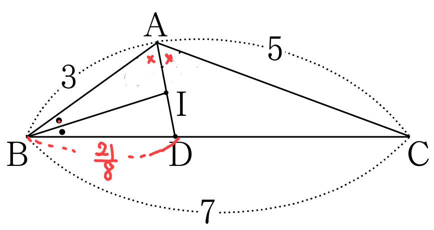
であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\ &= \frac{2}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + \frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\\ &= \frac{2}{9} + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{13}{18}}\end{aligned}$$

2.　△ABC の内心を I とする．
BC ＝ 7，CA ＝ 5，AB ＝ 3 とするとき，次の問に答えよ．
(1)　直線 AI と線分 BC の交点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．
(3)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．
(4)　線分 AI の長さを求めよ．

〔解答例〕





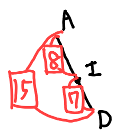
(1)　直線 AI は ∠BAC の二等分線より

BD：DC ＝ AB：AC ＝ 3：5 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{\frac{5}{8}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boldsymbol{\frac{3}{8}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

(2)　$\mathrm{BD} = \dfrac{3}{8}\mathrm{BC} = \dfrac{21}{8}$

直線 BI は ∠ABC の二等分線より AI：ID ＝ BA：BD ＝ $3 : \dfrac{21}{8}$ ＝ 8：7 であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{8}{15}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{8}{15}\left(\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boldsymbol{\frac{1}{5}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{3^2+5^2-7^2}{2} = \boldsymbol{-\dfrac{15}{2}}$　← $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$

(4)

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + \frac{2}{15}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{25}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\\ &= \frac{1}{9}\cdot 9 + \frac{2}{15}\left(-\frac{15}{2}\right) + \frac{1}{25}\cdot 25 = 1\end{aligned}$$

$|x\vec{a}+y\vec{b}|^2 = x^2|\vec{a}|^2 + 2xy\,\vec{a}\cdot\vec{b} + y^2|\vec{b}|^2$

よって　AI ＝ **1**

3. 平面上の点 O を中心とする半径 2 の円周上に 3 点 A，B，C があり，

$$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

を満たす．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めよ．

(2) 線分 AB の長さを求めよ．

(3) 線分 AB と線分 OC の交点を D とするとき，$\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表せ．

(4) 四角形 OACB の面積を求めよ．

〔解答例〕

$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ ……①

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$ ……② ← 円の半径は2

(1) ① から $4\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$

$|4\overrightarrow{OC}|^2=|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|^2$

これより $16|\overrightarrow{OC}|^2=4|\overrightarrow{OA}|^2+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+9|\overrightarrow{OB}|^2$

2 展開すると内積がでてくる

② から $64=16+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+36$

よって $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\mathbf{1}$ ……③

(2) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$

$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$=4-2+4$ (∵ ②, ③)

$=6$

よって $AB=\sqrt{\mathbf{6}}$

(3) ① から $\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{5}$

よって $\overrightarrow{OD}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\overrightarrow{OB}$

(3) は点Dが OC上より kを実数として

$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OC}=k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)$

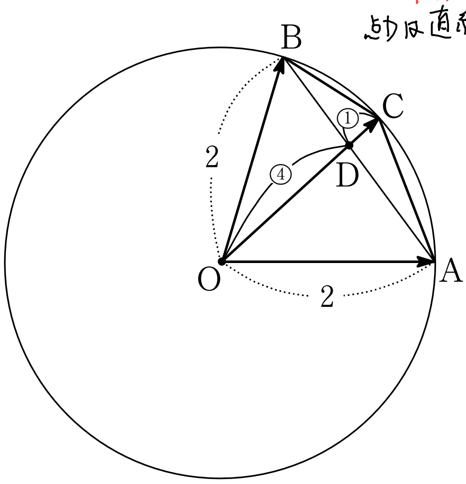
$=\underbrace{\frac{k}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}k\overrightarrow{OB}}_{\text{たしたら1}}$

点Dは直線AB上にあるので

$\frac{k}{2}+\frac{3}{4}k=1$

$\therefore k=\frac{4}{5}$

として求めることもできます



(4) (3) より $\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{OD}$

OD : DC = 4 : 1 であるから $\triangle ABC=\dfrac{1}{4}\triangle OAB$

四角形 OBCA の面積を S とすると

$$S=\triangle OAB+\triangle ABC=\frac{5}{4}\triangle OAB$$

ここで $\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4\cdot4-1}$ (∵ ②, ③)

$=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

面積の公式は使えるように！

よって $S=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}=\dfrac{\mathbf{5\sqrt{15}}}{\mathbf{8}}$